Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Kurssikoe 4.5.2010

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määritä euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukon

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y \leq 1 - x^2\}$$

sisäpisteiden joukko $int(A)$ ja reuna ∂A. Oikea vastaus riittää! Kannattaa piirtää kuva.

2. (a) Olkoon kuvaus $f : X \to Y$ jatkuva, ja olkoon (x_n) jono X:ssä. Osoita, että jos jono (x_n) suppenee, niin sen kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee Y:ssä.

(b) Olkoon $f : X \to Y$ peräti homeomorfismi. Osoita, että jos kuvien jono (y_n), jossa $y_n = f(x_n)$, suppenee, niin jono (x_n) suppenee X:ssä.

3. (a) Määrittele metrisen avaruuden (X, d) yhtenäisyys. Lisäksi, olkoon $A \subset X$. Kuinka joukon A yhtenäisyys käsitteenä palautuu edellä määrittelemääsi avaruuden yhtenäisyyteen?

(b) Osoita seuraava: Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jos on olemassa sellainen $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $\partial A = \emptyset$, ts. A:n reuna on tyhjä, niin avaruus X on epäyhtenäinen.

4. Todista kurssin lause: Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoot A ja B sen erillisiä ja epätyhjiä osajoukkoja, A kompakti ja B suljettu. Tällöin $d(A, B) > 0$. Saa käyttää läheisesti asiaan liittyviä lauseita.

Ohje. Jos mokomaa tarvitsee, voi pitää tunnettuna että

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = \inf\{d(x, B) \mid x \in A\}.$$