

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja A sen epätyhjä osajoukko. Osoita, että joukko

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) > 0\}$$

on avoin X :ssä.

2. Määritellään \mathbf{R} :ssä pisteiden x ja y välimatka yhtälöllä

$$d(x, y) = ||x| - |y||, \quad \text{kun } x, y \in \mathbf{R}.$$

Mitkä metriikkapostulaateista (M1)-(M3) kuvaus d toteuttaa joukossa \mathbf{R} ? Onko se metriikka siinä? Perustelu.

3. Olkoon $(E, \| * \|)$ normiavaruus, ja kiinnitetään kaksi sen pistettä $a, b \in E$. Tarkastellaan kuvausta $f : [0, 1] \rightarrow E$,

$$f(t) = (1 - t)a + tb, \quad \text{kun } t \in [0, 1],$$

jossa väli $[0, 1]$ on varustettu tavallisella euklidisella metriikalla d .

(a) Osoita että f on jatkuva.

(b) Osoita että se on peräti Lipschitz.

4. Tarkastellaan euklidisen tason \mathbf{R}^2 :n osajoukkoja

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, xy = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}.$$

(a) Osoita, että joukko A on suljettu.

(b) Osoita, tavalla tai toisella, että A :lla ja B :llä on jotkin erilliset ympäristöt, ts. \mathbf{R}^2 :n avoimet joukot U ja V , joilla $A \subset U$, $B \subset V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Ohje (b). Sopiva lause tai voit konstruoida A :n ja B :n väliin erottavan käyrän.