Topologia I
Kertaustehtäviä 2, kevät 2010

1. Todista Brouwerin kiintopistelause dimensiossa yksi: Jatkuvalla kuvauksella $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ (euklidinen metriikka) on ainakin yksi kiintopiste.

Ohje. Seuraa lyhyesti Bolzanon lauseesta.

2. (8:5) Olkoon A metrisen avaruuden X osajoukko. Osoita, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa $\partial(\partial A) \neq \partial A$.

Ohje. Esimerkissä voi valita vaikkapa $X = \mathbf{R}$ ja $A = \mathbf{Q}$.

3. Olkoon $X =]0, 1[$ ja $Y =]1, \infty[$. Tunnetusti kuvaus $f : X \to Y$, $f(x) = 1/x$, on homeomorfismi. Anna avaruuden X jono (x_n), joka on Cauchy, mutta vastaava kuvajono $\big(f(x_n)\big)$ ei ole. Voiko tästä vetää johtopäätöksen, ettei f ole bilipschitz?

4. Tarkastellan euklidista avaruutta $\mathbf{R}^n$ ja sen avointa yksikkökuulaa $B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < 1\}$. Määritellään kuvaukset $f : B \to \mathbf{R}^n$ ja $g : \mathbf{R}^n \to B$ asettamalla

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - |x|}\right) x,\ x \in B, \quad g(x) = \left(\frac{1}{1 + |x|}\right) x,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Totea ensin, että kuvaukset on määritelty hyvin. Osoita, että $f : B \approx \mathbf{R}^n$, ts. että f on homeomorfismi. Onko se bilipschitz?

Ohje. Osoita f ja g toistensa käänteiskuvauksiksi.

5. Mallinnetaan maapallo $\mathbf{R}^3$:n yksikköpallona $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = 1\}$. Sovitaan, että kullakin ajanhetkellä lämpötila on maapallon pinnalla määritelty jatkuva funktio. Osoita, että aina löytyy paikka, jossa on sama lämpötila kuin tasan toisella puolella maapalloa.

Ohje. Yhtenäisyys.

6. Tarkastellaan euklidisen tason osajoukkoa, käyrää $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy^2 = 1\}$. Onko se (a) täydellinen, (b) kompakti, (c) yhtenäinen? Perustelut. $\mathbf{R}$:n yhtenäiset joukot tiedetään (lause 14.15).

7. (13:13) Olkoon avaruus X kompakti ja (x_n) sen jono, jolla on tasan yksi kasautumisarvo a. Osoita, että $x_n \to a$.

8. (11:7) Olkoon $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbf{R}^2$. Suppeneeko jono (x_n)? Määritä sen kasautumisarvot. Hae kullekin kasautumisarvolle jokin sitä kohti suppeneva osajono.