**Topologia I**

Kertaustehtäviä 1, kevät 2010

1. Pidetään tunnettuna että $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ kaikilla $a, b \in \mathbf{R}_+$.

(a) Määritteleekö kuvaus $x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\| = \sqrt{|x_1| + 5|x_2|}$ normin vektoriavaruudessa $\mathbf{R}^2$?

(b) Määritteleekö kuvaus $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$, metriikan pistejoukossa $\mathbf{R}^2$?

2. Tutki, onko kuvaus

$$d(s, t) = \ln(1 + |s - t|), \quad s, t \in \mathbf{R},$$

metriikka pistejoukossa $\mathbf{R}$. Logaritmifunktion $x \mapsto \ln x$ perusominaisuudet pidetään tunnettuina.

3. Osoita että kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \max\{x, y\}$ kun $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on 1-Lipschitz ja siten jatkuva.

4. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}$ ja $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 3\}$. Näytä että $A$ ja $B$ ovat euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ suljettuja joukkoja, ja laske joukkojen välinen etäisyys $d(A, B)$ euklidisessa metriikassa $d$.

5. Näytä että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < x + y + z < 1 + x^2 + y^2 + z^2\}$$

on avoin ja joukko

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 + x^2 + y^2 \le z \le 3 + x^2 + y^2\}$$

on suljettu euklidisessa avaruudessa $\mathbf{R}^3$.

6. (5:6) Olkoot $A$ ja $B$ metrisen avaruuden $(X, d)$ epätyhjiä osajoukkoja ja $d(A, B) > 0$. Osoita että $d(x, A) + 5d(x, B) > 0$ kaikilla $x \in X$, ja että yhtälön

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + 5d(x, B)}$$

määrittelemä funktio $f : X \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Määritä $f$:n suurin ja pienin arvo.

7. Tutki, onko euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ joukko $A$ suljettu, kun

$(a)$ $A = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ |y| \leq |x|\}$, $(b)$ $A = \{(x,y) \mid |x| = |y| = 1/n,\ n \in \mathbf{N}\}$

$(c)$ $A = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} \{(x,y) \mid y \leq kx\}$.

Jos ei, niin anna sulkeuma $\bar{A}$. Anna myös erakko- ja kasautumispisteet.

8. (6:15) Osoita että kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos $cl(f^{-1}B) \subset f^{-1}\bar{B}$ kaikilla joukoilla $B \subset Y$.

Ohje. Lauseet 6.8, erityisesti kohta (3) tai (4), ja 6.13.

9. Olkoon $f(x) = |x|$, kun $x \in \mathbf{R}$. On osoitettava että $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ on jatkuva. Mikä *vika* on seuraavassa todistuksessa:

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$. Koska $f^{-1}[a,b] = [-b,-a] \cup [a,b]$, ja välit $[-b,-a]$ ja $[a,b]$ ovat tunnetusti suljettuja $\mathbf{R}$:ssä, lauseen 6.13 perusteella $f$ on jatkuva kuvaus.