Topologia I

Harjoitus 8, kevät 2010

1. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ vakio, ja olkoot välit $X =]a, \infty[$ ja $Y =]-\infty, a[$ tavallisella euklidisella metriikalla varustettuja.

(a) Konstruoi jokin homeomorfismi $f : X \approx Y$, perustellen homeomorfisuus.

(b) Onko kuvauksesi peräti bilipschitz?

2. (9:5) Konstruoi jokin homeomorfismi $f : B^2 \approx \mathbf{R}^2$, jossa $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ on tason avoin yksikkökiekko. Todistuksen voit vaihteeksi sivuuttaa. Löydätkö kuitenkin käänteiskuvauksen?

3. Tarkastellaan $\mathbf{R}^3$:n pintaa $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sin x + \cos y\}$ varustettuna (indusoidulla) euklidisella metriikalla. Pidetään tunnettuna, että kuvaus

$$f : A \to \mathbf{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x, y) \quad \text{kaikilla } (x, y, z) \in A,$$

on bijektio. Osoita, että se on homeomorfismi, ja siten $A \approx \mathbf{R}^2$. Edelleen pidetään tunnettuna, että kuvaukset $\sin, \cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia.

4. (10:1) Olkoon g tehtävän 2:4 antama $\mathbf{R}$:n metriikka, ts. $g(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, kun $x, y \in \mathbf{R}$. Onko g (a) ekvivalentti, (b) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbf{R}$:n tavallisen metriikan d kanssa?

Ohje. Kuvaukset $f, g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, joissa $f(t) = \sqrt{t}$ ja $g(t) = t^2$ ovat jatkuvia, erityisesti pisteessä $t = 0$.

5. (9:15) Olkoon $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva ja $g(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita että yhtälö $f(x, y) = ((x, g(x)y)$ määrittelee homeomorfismin $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ja anna käänteiskuvauksen lauseke. Olkoon $g(x) = e^x$, ja olkoot A ja B vaakasuoria suoria. Osoita että $d(fA, fB) = 0$, ja päättele tästä, että ehto $d(A, B) > 0$ ei ole topologinen ominaisuus.

Huom. On syytä olla varovainen sen suhteen, mikä on tai ei topologinen ominaisuus. Esimerkki: Olkoon $x \in X$ ja $\emptyset \neq A \subset X$. Tällöin $d(x, A) > 0$ on topologinen ominaisuus. Miksi?

6. Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C([0, 1], \mathbf{R})$. Olkoot d ja e siinä metriikat, jotka normit $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ ja $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$, kun $f \in E$, ovat luoneet. Osoita että $\tau_e \subset \tau_d$. Päteekö topologioiden inkluusio toisin päin?