Topologia I
Harjoitus 6, kevät 2010

1. (5:7) Olkoon E normiavaruus, $I = [0, 1]$ ja $f, g : I \to E$ jatkuvia. Osoita, että yhtälön

$$h(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s)$$

määrittelemä kuvaus $h : I^2 \to E$ on jatkuva, missä I^2 on neliö $I \times I \subset \mathbf{R}^2$.

2. Tutki, ovatko seuraavat tason $\mathbf{R}^2$ osajoukot suljettuja:

$$(a) \quad A_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1/k \le |(x,y)| \le 1\}, \text{ jossa } k \in \mathbf{N}, \quad (b) \quad A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k.$$

Jos ei, niin määrää sulkeuma. Ohje. Sulkeumaksi osoittamisessa on hyötyä lauseen 6.8 kohdasta (4).

3. Anna tason $\mathbf{R}^2$ joukkojen

$$A = \{(k, 1/n) \mid k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\} \quad \text{ja} \quad B = \{(k, 1/n) \mid k \in \mathbf{Q},\ n \in \mathbf{N}\}$$

kasautumispisteet ja sulkeumat. Lyhyt vastaus riittää.

Ohje. Kahden reaaliluvun $a < b$ välissä on aina rationaaliluku $q \in \mathbf{Q}$: $a < q < b$.

4. Onko $\mathbf{R}^2$:n osajoukko

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin(1/x)\}$$

suljettu, ja jos ei, niin mikä on sen sulkeuma $\bar{A}$? Mitkä pisteet ovat kasautumispisteitä? Kovin yksityiskohtaista todistusta ei tässä haeta.

Ohje. Hahmottele kuva. Huomioi pisteet $(x_k, y_k) \in A$, joissa $x_k = 1/(\pi/2 + k\pi)$ ja $k \in \mathbf{N}$ on parillinen tai pariton. Bolzanon lause.

5. (6:12) Olkoot $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia ja $A \subset X$ sellainen joukko, että $f|A = g|A$. Osoita, että $f|\bar{A} = g|\bar{A}$.

6. (6:18) Osoita, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena laskevasta jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$.

Ohje. Käytä sopivia r-ympäristöjä, kts. 4.10.

Huom. Ensimmäisen kurssikokeen alue on Väisälän luvut 0-6. Viimeisenä lukuna siis Suljetut joukot ja sulkeuma. Kokeissahan saa olla mukana yhden A4-arkin kokoinen tiivistelmä.