

Topologia I
Harjoitus 5, kevät 2010

1. Tarkastellaan euklidisen tason \mathbf{R}^2 osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid e^{xy} > x^2 - y^2\}.$$

Osoita jatkuvien kuvausten avulla, että se on avoin joukko.

2. (4:4) Olkoon $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x)$$

määrittelee kuvauksen $\alpha : E \rightarrow E$, $f \mapsto \alpha(f)$. Todista, että α on jatkuva.

3. (4:11) Olkoon $f : [-10, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ funktio $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen M , että f on M -Lipschitz.

4. (5:8, osa) Olkoot $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita, että myös niiden minimifunktio

$$h : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{kun } x \in X,$$

on jatkuva.

5. (4:8) Olkoon

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x, y) \neq \mathbf{0}.$$

Osoita, että näin määritelty funktio $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ on epäjatkuva origossa mutta että f :n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa. Lyhyeen kysymykseen lyhyt vastaus, onko $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva muualla?