Topologia I
Harjoitus 4, kevät 2010

1. (2:12) Olkoon $E = raj([0,1],\mathbf{R})$ varustettuna supnormilla. Määritä $d(A)$, kun $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$.

Ohje. Piirrä kuvaajia. Mikä on $\lim_{n\to\infty}(x - x^n)$, kun $0 \le x < 1$?

2. Onko $\mathbf{R}^2$:n osajoukko avoin, kun se on

(a) $A = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$, (b) $B = A^c$, (c) $C = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \sin x_1 < x_2\}$?

Lyhyt vastaus riittää.

3. (3:5) Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että A on kaikkien ympäristöjensä leikkaus.

4. Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C([0,1],\mathbf{R})$ varustettuna supnormilla $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ (tässä sup on tunnetusti max) ja tämän luomalla metriikalla. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia E:ssä (perustelu):

(a) $A = \{f \in E \mid \|f\|_\infty > 0\}$, (b) $B = \{f \in E \mid f(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]\}$, (c) $C = \{f \in E \mid f(1/n) > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}\}$?

5. Olkoon X metrinen avaruus, kuvaus $f : X \to \mathbf{R}$ olkoon jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $f(a) > 0$. Osoita, että a:lla on ympäristö $U \subset X$, jossa kaikilla x pätee $f(x) > f(a)/2$.

6. (4:2) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, joka ei ole Lipschitz. Perustele.