Topologia I
Harjoitus 2, kevät 2010

1. (Väisälä 1:1) Todista, että $\mathbf{R}^n$:n tavallinen sisätulo eli pistetulo toteuttaa ehdot (S1)–(S5).

2. Olkoot $x = (1, -1, 2)$ ja $y = (1, -2, 1)$ euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreita sekä $a = -2$. Määritä

(a) $a(x - y)$, (b) $a|x - y|$, (c) $|a|(|x| - |y|)$, (d) $a(x \cdot y)$, (e) $|a||x||y|$, (f) $x \cdot ay$,

kun käytetään tavallista pistetuloa ja sen määrittelemää tavallista normia.

3. Olkoon E (reaalikertoiminen) vektoriavaruus, ja olkoot $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sekä $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sen kaksi sisätuloa. Osoita, että myös kuvaus

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{R}, \quad \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_1 + \langle x, y \rangle_2,$$

on sen sisätulo.

4. (1:4) Olkoon E sisätuloavaruus ja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sen sisätulo. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on joukko

$$A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita, että joukko $A^\perp$ on E:n vektorialiavaruus.

5. (a) Olkoon $0 \neq w \in \mathbf{C}$. Mikä on yksiön $\{w\}$ ortokomplementti $\mathbf{C}$:ssä (tämä varustettuna kompleksisella sisätulolla)?

(b) Olkoon $w = (1, 1 + i) \in \mathbf{C}^2$. Mikä on yksiön $\{w\}$ ortokomplementti $\mathbf{C}^2$:ssa (tämä varustettuna kompleksisella sisätulolla)?

Ohje. (b) Muista, että avaruuden $\mathbf{C}^2$ vektorit ovat muotoa $z = (z_1, z_2)$, jossa $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.