Topologia I
Harjoitus 12, kevät 2010

1. (14:12, muunnos) Tarkastellaan tason $\mathbf{R}^2$ joukkoa $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.
(a) Onko E yhtenäinen? (b) Onko sulkeuma $\bar{E}$ yhtenäinen?
Ohje. (b) Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Hainnollista kuvalla.

2. Tarkastellaan harjoituksen 11 tehtävässä 1 esiintyviä $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja
$A_1 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \le 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \mid xy = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 < 4\}$.
Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbf{R}^2$:n alueita?
Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 1.

3. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $I = [0,1]$. Olkoot $\alpha : I \to X$ ja $\beta : I \to X$ sen polkuja, joilla $\alpha(1) = \beta(0)$, siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi α:n ja β:n avulla X:n polut $\gamma : I \to X$ ja $\eta : I \to X$, joilla $\gamma(0) = \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$, ja $\eta(0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(0)$. Voi sanoa, että γ kulkee α:n ja β:n peräkkäin, ja η taas käänteisessä järjestykessä.

4. (14:4) Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $X = A \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$. Olkoon $f : X \to \mathbf{R}^2$ jatkuva kuvaus, jolla $f(x,0) = (0,0)$ kaikilla $x \in A$. Todista, että kuvajoukko fX on yhtenäinen.
Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0,1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12 tai polkuyhtenäisyys.

5. (14:18) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^2$ konveksi rajoitettu joukko, joka yksinkertaisuuden vuoksi sisältää origon. Osoita, että komplementtijoukko $E = \mathbf{R}^2 \setminus A$ on polkuyhtenäinen.
Ohje. Laita A suorakulmion sisään (aidosti). Käytä tehtävän 3 tulosta. Havainnollista kuvalla.

6. (14:26) Olkoon E normiavaruus, $\emptyset \neq A \neq E$ sen suljettu osajoukko, U joukon A ympäristö ja $a \in A$. Osoita, että $d(a, U \setminus A) = d(a, E \setminus A)$.
Ohje. Välittömästi voi todeta, että $d(a, U \setminus A) \ge d(a, E \setminus A)$. Miksi? Osoita, että jos $x \in E \setminus A$, niin jana $[a,x]$ kohtaa joukon $U \setminus A$, sanokaamme pisteessä y. Silloin $d(a,x) \ge d(a,y)$. Miksi muuten $U \setminus A \neq \emptyset$?