Topologia I
Harjoitus 11, kevät 2010

1. (13:3) Tutki $\mathbf{R}^2$:n joukoista A_k, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä, kun

$$A_1 = \{(x,y) \,|\, x^2 + 3y^2 \le 4\}, \; A_2 = \{(x,y) \,|\, xy = 1\}, \; A_3 = \{(x,y) \,|\, x^2 + 3y^2 < 4\}.$$

2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason $\mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita, että löytyy sellainen piste $(a,b) \in A$ (ainakin yksi), että $x + 2y \le a + 2b$ kaikilla $(x,y) \in A$.

Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta. Piirrä havainnekuva.

3. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X,d) osajoukko, josta lötyy sellainen jono (x_n), että $d(x_k, x_n) \ge r$ kaikilla $k \neq n$. Osoita, että A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioden avaruus $E = C([0,1], \mathbf{R})$ supnormilla $\|{*}\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$ kun $f \in E$. Osoita a-kohtaa hyväksi käyttäen, että suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E \,:\, \|f\|_\infty \le 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se on suljettu ja rajoitettu joukko E:ssä.

Ohje. Paloittain määritellyt (yksinkertaiset) funktiot $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$.

4. (13:4, muunnos) Olkoon avaruus (X,d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita, että leikkaus $\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

(b) Osoita, että jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö.

(c) Päteekö a-kohta, jos oletus kompaktiudesta pudotetaan pois?

Ohje. (a) Avaruuden X avoimien peitteiden käyttö antaa erityisen lyhyen todistuksen. Voi myös käyttää jonoa (x_n), jossa $x_n \in A_n$. (c) Valitse $X = \mathbf{R}$.

5. Osoita, että $\mathbf{R}^n$:n kaikki normit ovat bilipschitz-ekvivalentteja keskenään. Yhtäpitävästi: Olkoon $|*|$ avaruuden $\mathbf{R}^n$ tavallinen euklidinen normi ja olkoon $\|*\|$ jokin muu normi siinä. Osoita, että löytyy vakiot $M, m > 0$, joilla pätee

$$m|x| \le \|x\| \le M|x| \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Ohje. Tarkastele kuvausta $f = \|*\| \circ id : S^{n-1} \to \mathbf{R}$, joka on yhdistelmä identtisestä kuvauksesta $id : \big(\mathbf{R}^n, |*|\big) \to \big(\mathbf{R}^n, \|*\|\big)$ ja normikuvauksesta $\|*\| : \big(\mathbf{R}^n, \|*\|\big) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Joukko S^{n-1} on $\mathbf{R}^n$:n euklidinen yksikköpallo $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, |x| = 1\}$. Aloita osoittamalla kyseinen id Lipschitz-kuvaukseksi.

Huom. Vakiot m ja M riippuvat normista $\|*\|$. Tulos merkitsee, että topologian (ja metriikankin) kannalta on samantekevää, mitä normia $\mathbf{R}^n$:ssä käytetään.