Topologia I
Harjoitus 10, kevät 2010

1. Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$, joka suppenee välillä $[a,b]$ tasaisesti kohti funktiota $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Osoita, että tällöin

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Päteekö vastaava tulos derivaatoille? Lyhyt vastaus.

2. (12:3) Todista, että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu. Tästä seuraa lauseen 12.6 käänteinen puoli.

3. (12:4) Olkoon (X,d) täydellinen metrinen avaruus ja (x_n) sellainen jono X:ssä, että $d\big(x_n, x_{n+1}\big) \le 10 * 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Osoita, että jono suppenee kohti jotakin pistettä $a \in X$. Osoita lisäksi, että $d(x_5, a) < 1$.

4. (12:6, muunnos) Tarkastellaan jatkuvien funktioden avaruutta $E = C([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla $\| * \|_\infty$.

(a) Osoita, että normiavaruuden $(E, \|*\|_\infty)$ Cauchy-jono (f_n) suppenee pisteittäin välin $[0,1]$ pisteissä kohti erästä funktiota $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.

(b) Osoita, että suppeneminen $f_n \to f$ on tasaista välillä $[0,1]$.

(c) Osoita edellisiin kohtiin ja lauseeseen 11.24 nojaten, että normiavaruus $(E, \| * \|_\infty)$ on täydellinen.

Ohje. (b) Olkoon $\epsilon > 0$. Valitse sellainen n_ϵ, että $\|f_k - f_n\|_\infty < \epsilon/2$, kun $k, n \ge n_\epsilon$, ja anna n:n mennä äärettömään.

5. (12:11) Olkoon X täydellinen ja $f : X \to Y$ bilipschitz. Osoita, että kuvajoukko fX on täydellinen ja siis suljettu Y:ssä.

6. (12:14) Olkoon $(E, \| * \|)$ täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, ja olkoon $f : E \to E$ kontraktio. Osoita, että yhtälö $F(x) = x + f(x)$ määrittelee homeomorfismin $F : E \to E$, joka on bilipschitz.

Ohje. Kiinnitetään $y \in E$ ja merkitään $g_y(x) = y - f(x)$. Osoita, että kuvauksella $g_y : E \to E$ on täsmälleen yksi kiintopiste $G(y)$, jolloin saadaan kuvaus $G : E \to E$, $y \mapsto G(y)$. Osoita, että $F \circ G = G \circ F = id_E$, ja että F on bilipschitz. Kiinnitä erityistä huomiota epäyhtälöketjun puoleen $m\|x - z\| \le \|F(x) - F(z)\|$, kaikilla $x, z \in E$, missä $m > 0$.