Topologia I
Harjoitus 1, kevät 2010

1. Olkoon X perusjoukko ja olkoon $B \subset X$. Merkintä CB tarkoittaa komplementtia X:ssä: $CB = X \setminus B$. Olkoot $A_i \subset X$ kaikilla $i \in I$. Todista de Morganin laki

$$C \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} CA_i.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ylhäältä rajoitettu, epätyhjä reaalilukujoukko: on olemassa sellainen $a \in \mathbf{R}$, että $x \leq a$ kaikilla $x \in A$. Silloin A:n ylärajojen joukko $S = \{a \in \mathbf{R} \mid x \leq a \text{ kaikilla } x \in A\}$ on epätyhjä (ja alhaalta rajoitettu). Palautetaan mieleen (äärellisen) supremumin määritelmä: Reaalilukujen täydellisyysominaisuus sanoo, että näissä ylärojoissa on olemassa pienin luku, joukon A supremum $\sup A = \min S \in \mathbf{R}$. Toisin sanoen $\sup A \in S$ ja, jos $a \in S$, niin $\sup A \leq a$.

(a) Osoita, että $\sup A$ on yksikäsitteisesti määrätty.

(b) Jos on olemassa $m = \max A$, niin $\sup A = m$.

(c) Olkoon $\epsilon > 0$. Löytyy sellainen $x \in A$, että $x > \sup A - \epsilon$.

Huom. Reaalilukujoukon A suurimman alarajan, infimumin, ominaisuudet saadaan joukon $-A = \{-x \mid x \in A\}$ supremumin ominaisuuksista (-1:llä kertominen kääntää järjestyksen).

3. Olkoot $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 1\}$ ja $B = \{1/k \mid k \in \mathbf{N}\}$. Määrää $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\sup B$, $\inf B$, $\max B$ ja $\min B$, mikäli kyseinen luku on olemassa. Lyhyt vastaus riittää.

4. Olkoot $f : X \to Y$ ja $A_i \subset X$, $i \in I$. Tunnetusti pätee $f \cap \{A_i \mid i \in I\} \subset \cap\{fA_i \mid i \in I\}$. Osoita esimerkillä, jossa $\#X = 3$ ja $\cap\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$, että edellä annetussa inkluusiossa ei joukkojen yhtäsuuruuden tarvitse päteä.

5. Todista seuraava (Väisälä, lause 0.14): Oletetaan, että $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $g \circ f = id_X$ ja $f \circ g = id_Y$. Tällöin f ja g ovat bijektioita, ja $g = f^{-1}$.

Ohje. Pidetään tunnettuna seuraava: Jos $f : X \to Y$ on bijektio ja $f^{-1} : Y \to X$ sen käänteiskuvaus, niin $f^{-1} \circ f = id_X$ ja $f \circ f^{-1} = id_Y$.