Topo I, kevään 2010 luentopäiväkirja

April 29, 2010

Tähän luentopäiväkirjaan kirjataan lyhyesti *jälkikäteen* kullakin luennolla käsitellyt asiat ja vastaava kohta kirjassa Jussi Väisälä: Topologia I, 4. painos 2007. Tässä tekstissä tehdään myös ajankohtaisia, kurssia koskevia ilmoituksia.

18.1. Johdanto: Minkälaisia kysymyksiä topologiassa yleisesti ottaen tutkitaan.
Kirjan luku 0 (kertausmaisesti), s. 6-10:
Reaalilukujen täydellisyysominaisuus: osajoukon supremum ja infimum.
Joukko-oppia, joukko-operaatiot yhdiste, leikkaus, erotus ja komplementti.

Huom. Laskariryhmä 1 peruuntuu myös ma 15.2.

20.1. Luku 0, s. 11-13: Kuvausten joukko-opillisia ominaisuuksia.
Luku 1, s. 14: Vektoriavaruus, myös kompleksikertoiminen; $\mathbb{R}^n$ (reaalikertoiminen), $\mathbb{C}^n$ (kompleksikertoiminen).
Samastaminen $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (lineaarisen isomorfismin kautta), kun $\mathbb{C}^n$ tulkitaan (suppeammin) reaalikertoimiseksi vektoriavaruudeksi.

Huom. Heikki Koivupalo johtaa Topo I:n opintopiiriä salissa B321 perjantaisin 14-16. Aloitetaan 22.1.

21.1. Luku 1, s. 15-16: Esimerkkejä funktioavaruuksista.
Sisätulon postulaatit myös kompleksikertoimiselle vektoriavaruudelle.
Sisätuloavaruudet $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$ varustettuina pistetuloillaan.

25.1. Luku 1, s. 16-18: Schwarzin epäyhtälö, lause 1.5.
Normipostulaatit, normiavaruudet $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$. Rajoitettujen funktioiden supnormi, $\mathbb{R}^n$:n eri normeja.
Sisätuloavaruus l_2 (reaalisena tai kompleksisena).

27.1. Luku 1. s. 19: Funktioavaruuksien normeja (L_p-normit).
Luku 2, s. 21-23: Metriikka postulaatteineen ja metrinen avaruus. Lause 2.2: Normiavaruus on metrinen avaruus. Osajoukon metriikka. Kuulat ja pallot.
Esimerkkejä metriikoista sekä kuulista ja palloista niissä.

28.1. Luku 2, s. 24-25: Joukkojen välinen etäisyys, pisteen etäisyys joukosta, lause 2.10. Esimerkkejä etäisyyksistä.
Joukon läpimitta, läpimitan monotonisuus, lause 2.12 (kuulan halkaisija).

Huom. Laskariryhmän 5 (ti 16-18) sali on tästedes B322.

1.2. Luku 2, s. 26: Rajoitettu joukko ja rajoitettu kuvaus. Lauseet 2.14-15. Rajoitettujen kuvausten $f : D \to X$ supmetriikka.

Luku 3, s. 29-30: Avoimen joukon määritelmä. Lauseet 3.2, 3.4 ja 3.5. Esimerkkejä avoimista ja epäavoimista joukoista.

3.2. Luku 3, s. 31: Pisteen ja joukon ympäristö, erakkopiste, diskreetti osajoukko, diskreetti avaruus. Kohta 3.13* (Topologinen avaruus) kuitattiin lyhyellä puheella.

Luku 4, s. 35: Määritelmä funktion $f : X \to Y$, jossa (X, d) ja (Y, e) metrisiä avaruuksia, jatkuvuudella pisteessä $a \in X$ ja sen muotoilu kuulaympäristöjen $B_d(a, \delta)$ ja $B_e(f(a), \epsilon)$ avulla. Jatkuva funktio (=jatkuva kaikissa pisteissä). Muutama esimerkki.

4.2. Luku 4, s. 36-37: Esimerkkejä jatkuvista ja epäjatkuvista kuvauksista.

Lipschitz-kuvaus. Lause 4.5: Lipschitz-kuvaus on jatkuva. Pisteen etäisyys joukosta, $d(x, A)$, määrittelee 1-Lipschitz kuvauksen $x \mapsto d(x, A)$. Erityisesti etäisyys- ja normikuvaukset $x \mapsto d(x, x_0)$ ja $x \mapsto |x|$ ovat 1-Lipschitz.

Huom. Korvaavat kurssikokeet ovat 1. ma 15.3. 16-18 A111 ja 2. ma 10.5. 13-15 A111. Korvaavaan kokeeseen osallistumiseen pitää olla pätevä syy (ja siitä dokumentti, lääkärintodistus tms.).

8.2. Kuratowskin upotuslause (Väisälässä tehtävänä 2.16).

Luku 4, s. 37-39: Kuvauksen jatkuvuuden karakterisointi ympäristöjen avulla (lause 4.7), avoimien joukkojen alkukuvien avulla (lause 4.8), yhdistetyn kuvauksen jatkuvuus (lauseet 4.12 ja 4.13) sekä joukon r-ympäristö (lause 4.11). Esimerkki joukon avoimeksi osoittamisesta jatkuvien kuvausten avulla.

Luku 5, s. 41: Kuvausten summa ja tulo. Esimerkki, jossa $x \mapsto x^2$ tulkitaan tuloksi.

10.2. Luku 5, s. 41-43: Jatkuva kuvaus normiavaruuteen, $f : X \to E$. Jatkuvien kuvausten summa ja tulo ovat jatkuvia (lauseet 5.2 ja 5.3). Esimerkkejä, erityisesti "normitusprojektio" $p(x) = x/|x|$, kun $x \in E \setminus \mathbf{0}$ (E normiavaruus), on jatkuva.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ projektiokuvaukset pr_k ovat jatkuvia (lause 5.6). Esimerkkejä kuvauksista $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Kuvauksen $f : X \to \mathbb{R}^n$ komponenttikuvaukset f_k. Vektoriarvoisen kuvauksen f jatkuvuus komponenttien f_k avulla ilmaistuna (lause 5.9).

Huom. Ensimmäisen kurssikokeen alue on Väisälän luvut 0- 6. Viimeisenä siis luku Suljetut joukot ja sulkeuma. Kokeissahan saa olla mukana A4-arkin kokoinen tiivistelmä.

11.2. Luku 5, s. 44: Esimerkkejä jatkuvista ja epäjatkuvista kuvauksista (normiavaruuteen). Erityisesti jatkuvuutta ei voi päätellä tiedosta, että kuvauksen rajoittumat alempiulotteisiin aliavaruuksiin lähtöpuolella ovat jatkuvia (Väisälä harjoitus 4:8).

15.2. Luku 6, s. 46-49: Suljetut joukot ja sulkeuma. Määritelmät, sulkeuman perusominaisuudet (lause 6.8), esimerkkejä suljetuista joukoista ja sulkeumista.

Milloin suppi on maksimi ja inffi on minimi reaalilukujoukossa? Sille riittävä ehto (lause 6.10). Sulkeuman luonnehdinta etäisyysfunktion avulla (lause 6.11).

17.2. Luku 6, s. 49-50: Kuvauksen jatkuvuuden luonnehdinta suljettujen joukkojen ja sulkeuman avulla (lauseet 6.12 ja 6.13). Joukon avoimen r-ympäristön sulkeuma kontra vastaava suljettu r-ympäristö (lauseet 6.15 ja 6.17, jälkimmäisen todistus sivuutettiin).

Esimerkkejä suljetuista joukoista, ja kuinka jatkuvia kuvauksia voidaan käyttää perusteluna.

18.2. Luku 6, s. 51: Milloin kahdella erillisellä joukolla on erilliset ympäristöt? Urysohnin lemma (lause 6.18).

Kasautumispiste: määritelmä ja muutama esimerkki.

22.2. Luku 6, s. 51-52: Sulkeuman luonnehdinta kasautumispisteiden avulla (lauseet 6.21 ja 6.22).

Luku 7, s. 54-56: Relatiivitopologia. Avoimet ja suljetut joukot ja joukon sulkeuma relatiivitopologiassa, siis metrisen avaruuden (X, d) osajoukossa A, joka on varustettu indusoidulla metriikalla d_A (lauseet 7.2, 7.4, 7.6, 7.7 ja 7.9). Yksinkertaisia esimerkkejä.

Rajoittumakuvauksen jatkuvuuden suhde koko kuvauksen jatkuvuuteen (lauseet 7.11 ja 7.13). Lisäksi lausetta 7.13 vastaava avoimien osajoukkojen versio (jonka todistus on melkein sama kuin 7.13:n; suljettu vain vaihtuu avoimeksi):

Lause (Väisälä teht. 7:8): Olkoon $X = \cup\{U_i \,|\, i \in I\}$, jossa U_i:t ovat X:n *avoimia* joukkoja. Olkoon $f : X \to Y$ sellainen kuvaus, että sen rajoittumat $f|U_i : U_i \to Y$ ovat kaikki jatkuvia funktioita. Tällöin myös $f : X \to Y$ on jatkuva funktio.

24.2. Luku 7, s. 57: Esimerkkejä, joissa rajoittumien jatkuvuudesta seuraa koko funktion jatkuvuus. Maalin pienennys (lause 7.17).

Luku 8, s. 59-60: Sisä-, ulko- ja reunapisteet, yksinkertaisia esimerkkejä niistä ja niiden perusominaisuudet (lause 8.3).

Huom. Päivämäärästä to 25.2. alkaen kurssi siirtyy kuuteen luentotuntiin viikossa, ja muutos koskee torstain aikaa, joka jatkossa on 8.30-10.00. Sali on B123, kuten tähänkin asti.

25.2. Käsiteltiin kertaustehtäviä.

Huom.1. Kurssi pitää kahden viikon tauon ja jatkaa viikolla 11, jolloin myös pidetään seuraavat, seitsemännet harjoiukset. Niiden pitäisi ilmestyä kotisivulle viikolla 10. Kertaustehtävistä 1 on malliratkaisut kotisivulla ja huoneessa C127.

Huom. 2. Antti Perälän vetämät laskarit (ryhmä 4 ti 14-16) peruuntuvat päiviltä 23.3. ja 30.3., joten käykää vieraissa.

15.3. Luku 8. s. 60-61: Esimerkki joukon reunasta sekä sisä- ja ulkopisteistä.

Luku 9, s. 62-63: Homeomorfismin määritelmä ja lause 9.3. Esimerkkejä homeomorfismeista. Erityisesti käänteiskuvauksen muodostaminen ja kriteeri, että kyseessä on todella käänteiskuvaus.

17.3. Luku 9, s. 63-66: Upotus, lauseet 9.7 ja 9.8 (homeomorfia on ekvivalenssirelaatio), homeomorfismiluokat (kaari, Jordan-käyrä). Esimerkkejä luokista, homeomorfismeista ja upotuksista. Esimerkiksi $\mathbb{R}$:n välin jatkuva injektio $\mathbb{R}$:ään on upotus,. Yleisemmin Brouwerin alueensäilymislause (ilman todistusta): Olkoon U euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ *avoin* joukko. Silloin jatkuva injektio $f : U \to \mathbb{R}^n$ on upotus ja kuvajoukko fU on *avoin* $\mathbb{R}^n$:ssä.

18.3. Luku 9, s. 66-68: Bilipschitz-kuvaus ja isometria. Topologiset ja metriset ominaisuudet. Esimerkkejä. Lauseet 9.13, 9.15 (Topologiset ominaisuudet säilyvät homeomorfismeissa) ja 9.19 (Bilipschitz-kuvaus on upotus).

Luku 10, s. 71: Metriikkojen ekvivalenssi. Käsitteen määritelmä ja lause 10.2.

22.3. Luku 10, 71-72: Metriikkojen ja normien bilipschitz-ekvivalenssi. Lauseet 10.4, 10.6 ja 10.7. Esimerkkejä. Väisälän kirjan alaluku Tuloavaruus sivuutettiin (s. 72-76).

Luku 11, s. 78-79: Jonot ja raja-arvot. Mikä jono on. Jonon suppenemisen määritelmä. Lause 11.3.

Huom. Kuka haluaa nk. lisätehtäviä korvaamaan huonosti mennyttä ensimmäistä kurssikoetta, lähettäköön sähköpostia minulle. Laitan paluupostissa "kotona ratkottavaksi" tehtäviä kyseisen kokeen alueesta. lars.lamberg@helsinki.fi

24.3. Luku 11, s. 79-81: Lauseet 11.4, 11.6, 11.7, 11.8, 11.11, 11.12 ja 11.13. Jonon kasautumisarvon määritelmä. Muutama yksinkertainen esimerkki kasautumisarvoista.

25.3. Luku 11, s. 82-84: Osajonot, tasainen suppeneminen. Lauseet 11.17, 11.18, 11.21 (tasaisesta suppenemisesta seuraa pisteittäinen suppeneminen) ja 11.24 (tasainen suppeneminen säilyttää jatkuvuuden). Esimerkkejä funktiojonon pisteittäisestä ja tasaisesta suppenemisesta.

29.3. Luku 11, s. 84-85, 87-88: Esimerkki, jossa funktiojonosta otetut integraalit eivät suppene kohti rajafunktion integraalia, koska funktiojonon suppeneminen ei ole tasaista. Funktion raja-arvo pitkin joukkoa. Väisälän sivujen 86-87 lauseet sivuutettiin, mutta osa niiden sisällöstä koottiin kahdeksi peruslauseeksi.

Kuvauksen $f : A \to Y$ jatkuva jatke $g : B \to Y$ joukkoon $B \subset \bar{A}$, lause 11.33.

31.3. Luku 12, s. 90-92 (97-98): Täydellisyys. Cauchy-jonon ja täydellisen metrisen avaruuden määritelmät. Esimerkkejä. Lemma 13.3, lauseet 13.4, 12.5 ($\mathbb{R}^n$:n täydellisyys) ja 12.6.

Kontraktio ja kuvauksen kiintopiste. Yksinkertaisia esimerkkejä kiintopisteistä. Lause 12.8 (Banachin kiintopistelause).

8.4. Luku 12, s. 93-94: Esimerkkejä koskien kiintopisteitä kuten Newtonin menetelmä yhtälöiden ratkaisemiseksi ja Brouwerin kiintopistelause (ilman todistusta).

Tasainen jatkuvuus, lauseet 12.12, 12.14 ja 12.15.

Huom. Vihonviimeinen hetki kysyä 1. kurssikoetta petraavia tehtäviä.

12.4. Luku 13, s. 97-100: Kompaktius. Kompaktin avaruuden ja osajoukon määritelmä (nk. jonokompaktius). Esimerkkejä lähinnä epäkompakteista joukoista. Lauseet 13.6, 13.7, 13.8, 13.11, 13.13, 13.14 (Heine-Borel; lause *ei* päde yleisesti metrisissä avaruuksissa) ja 13.17 (Bolzano-Weierstrass). Esimerkkejä usein esiintyvistä $\mathbb{R}^n$:n kompakteista osajoukoista.

14.4. Luku 13, s. 100-103: Lauseet 13.48 (kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti), 13.19, 13.21 (jatkuva reaaliarvoinen kuvaus saa kompaktissa joukossa pienimmän ja suurimman arvonsa), 13.22, 13.23, 13.24, 13.25, 13.26, 13.28 (kompakti metrinen avaruus on täydellinen) ja 13.29 (riittää että suljetut rajoitetut joukot ovat kompakteja, silloin metrinen avaruus on täydellinen).

Huom. Luennolla to 22.4. Antti Perälä käy läpi joitakin kertaustehtäviä, joko omiaan tai etukäteen jaettavia. Kuitenkin tuttu aika ja paikka.

15.4 Luku 13, s. 103-106: Kompaktius avoimien peitteiden avulla. Avoin peite ja sen osapeite, esimerkkejä. Peitekompaktiuden määritelmä (meillä kompakti = jonokompakti). Lauseet 13.33 (Lebesguen peitelause; peitteen Lebesguen luku), 13.36 (jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa) ja 13.39 (Metrisen avaruuden tapauksessa jonokompakti = peitekompakti).

19.4. Luku 13: Esimerkkejä, jotka havainnollistavat lausetta 13.21 (Jatkuva reaaliarvoinen kuvaus saavuttaa kompaktissa joukossa maksiminsa ja miniminsä); funktioavaruuksissa joukot tuppaavat olemaan epäkompakteja, vaikka olisivat suljettuja ja rajoitettuja.

Luku 14, s. 110-111: Yhtenäisyyden määritelmä. Separaation käsite jätetään väliin.

Huom. Ensimmäistä kurssikoetta petraavia tehtäviä ei enää jaella. Laittakaa ratkaisuihinne nimi ja opiskelijanumero. Ylimääräisten sydämentykytysten välttämiseksi tiedoksi, että korotus tulee huomioiduksi vasta lopullisessa Oodi-listassa, ei vielä Kurki-tiedoissa. Näin on sovittu Terhi Hautalan kanssa.

21.4. Luku 14, s. 112-114: Lauseet 14.6, 14.7, 14.9, 14.11 (Yhtenäisen sulkeuma on yhtenäinen), 14.12, 14.13 (Reunanylityslause) ja 14.15 (Euklidisen $\mathbb{R}$:n yhtenäiset joukot ovat välit ja yksiöt).

22.4. Kertaustehtäviä.

26.4. Luku 14, s. 115-116: Lauseet 14.16, 14.17, 14.19 ja 14.20 (Bolzano). Esimerkkejä yhtenäisistä sekä epäyhtenäisistä joukoista. Esimerkkejä keskenään epähomeomorfisista avaruuksista.

Polku ja polkuyhtenäinen avaruus, määritelmät. Lauseet 14.22 ja 14.23 (Polkuyhtenäinen avaruus on yhtenäinen).

28.4. Luku 14, s. 117-120: Topologinen sinikäyrä yksityiskohtaisesti, lause 14.25 (Polkuyhtenäisen jatkuva kuva on polkuyhtenäinen).

Murtoviivayhtenäisyys normiavaruudessa: janapolku, jana, konveksi joukko, murtoviivayhtenäisyys. Lauseet 14.27 ja 14. 30 (Normiavaruuden alue on murtoviivayhtenäinen ja siis polkuyhtenäinen). Esimerkkejä konvekseista ja murtoviivayhtenäisistä joukoista. Erityisesti euklidinen pallo $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ on polkuyhtenäinen, kun $n \geq 2$, ja pätee $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$ kun $m \neq n$; todistus tälle asialle, kun $n = 1$.

29.4. (Viimeinen luento) Algebran peruslause; todistus Cauchyn idean mukaisesti, perustuen kompaktiuden käyttöön.

Huom. Toisen kurssikokeen 4.5. ja 10.5. (jälkimmäiseen osallistumiseen pitää olla pätevä syy) alue on Väisälän luvut 7-14, joista pois jäävät seuraavat asiat: tuloavaruus (luku 10), separaatio (luku 14) ja komponentit (luku 14). Kuten ennenkin, ”lunttilappu” on sallittu.

On aika palauttaa ensimmäistä kurssikoetta petraavat lisätehtävät. Niitä tullaan varvaankin pyytämään toisenkin kurssikokeen jälkeen, ja osoitehan on lars.lamberg@helsinki.fi. Joku on kysynyt myös kandintyöstä, ja pitäkää tekin yhteyttä.