Harjoitukset 8
Malliratkaisut (Tuomas Orponen)

Tehtävä 1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Varustetaan välit $X = (a, \infty)$ ja $Y = (-\infty, a)$ tavallisella metriikalla. (a) Konstroi jokin homeomeorfismi $f\colon X \approx Y$. (b) Onko f jopa bilipschitz?*

Ratkaisu 1. (a) Asetetaan $f(x) := 2a - x$, kun $x \in X$. Jos $x \in X = (a, \infty)$, niin $f(x) = 2a - x < a$, joten $f(x) \in Y$. Siis f on kuvaus $X \to Y$. Seuraavaksi haluamme löytää käänteiskuvauksen: tätä varten asetetaan $g(y) := 2a - y$. Nyt g on kuvaus $Y \to X$, sillä $g(y) = 2a - y > a$ kaikilla $y \in (-\infty, a)$. Lisäksi

$$(g \circ f)(x) = g(2a - x) = 2a - (2a - x) = x \quad \text{ja} \quad (f \circ g)(y) = 2a - (2a - y) = y$$

kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$, joten $g = f^{-1}$. On osoitettu, että f on bijektio. Homeomorfisuus seuraa siitä, että

(b) kuvaus f on 1-bilipschitz:

$$|f(x) - f(x')| = |(2a - x) - (2a - x')| = |x - x'|, \qquad x, x' \in X.$$

Erityisesti f on jatkuva. Samoin perustellaan, että $f^{-1} = g$ on jatkuva.

Tehtävä 2. *Konstruoi jokin homeomorfismi $f\colon B^2 \approx \mathbb{R}^2$, missä $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Etsi myös käänteiskuvaus.*

Ratkaisu 2. Asetetaan $f(x) := x/(1 - |x|)$, kun $x \in B^2$. Huomaa, että osoittaja ja nimittäjä ovat jatkuvia, eikä nimittäjällä ole nollakohtia määrittelyjoukossa, joten f on jatkuva. Väitämme, että käänteiskuvauksen lauseke on $g(y) := y/(1+|y|)$, $y \in \mathbb{R}^2$. Selvästi $|g(y)| < 1$ kaikilla $y \in \mathbb{R}^2$, joten g on kuvaus $\mathbb{R}^2 \to B^2$. Lisäksi

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{1 - |x|}\right) = \frac{x/(1 - |x|)}{1 + |x/(1 - |x|)|} = \frac{x}{(1 - |x|) + |x|} = x, \qquad x \in B^2,$$

ja

$$(f \circ g)(y) = f\left(\frac{y}{1 + |y|}\right) = \frac{y/(1 + |y|)}{1 - |y/(1 + |y|)|} = \frac{y}{(1 + |y|) - |y|} = y, \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

joten f on bijektio ja $g = f^{-1}$. Kuvaus g on jatkuva, joten f on homeomorfismi.

Tehtävä 3. *Tarkastellaan pintaa $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin x + \cos y\}$ varustettuna indusoidulla euklidisella metriikalla. Osoita, että kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x, y)$ on homeomorfismi $A \approx \mathbb{R}^2$. Pidetään tunnettuna trigonometristen funktioiden jatkuvuutta.*

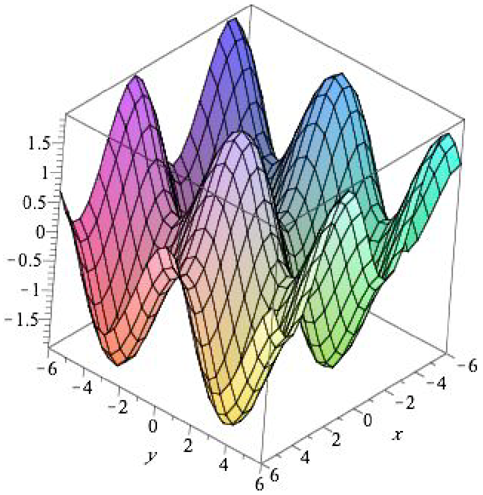
Ratkaisu 3. Ks. Kuva 1 alla. Ensinnäkin f on jatkuva, sillä komponenttikuvaukset ovat projektioita $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Kaava $g(x, y) := (x, y, \sin x + \cos y)$ määrittelee jatkuvan (katso taas komponenttikuvauksia) kuvauksen $\mathbb{R}^2 \to A$. Lisäksi

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(x, y) = (x, y, \sin x + \cos y) = (x, y, z), \quad (x, y, z) \in A,$$

sekä

$$(f \circ g)(x, y) = f(x, y, \sin x + \cos y) = (x, y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

joten f on bijektio, ja $g = f^{-1}$. On osoitettu, että f on homeomorfismi.



Kuva 1: Maplen näkemys joukosta A

Tehtävä 4. *Olkoon* $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *metriikka* $g(x,y)=\sqrt{|x-y|}$. *Onko* g (a) *ekvivalentti tai jopa* (b) *bilipschitz-ekvivalentti euklidisen metriikan* d *kanssa?*

Ratkaisu 4. (a) Metriikat g ja d ovat ekvivalentit. Tämä osoittamiseksi on näytettävä, että $id\colon(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},g)$ on homeomorfismi. Kuvaus $t\mapsto\sqrt{t}$ on jatkuva origossa, joten jokaista $\epsilon>0$ vastaa $\delta>0$, jolla $g(x,y)=\sqrt{|x-y|}<\epsilon$, kunhan $d(x,y)=|x-y|<\delta$. Tämä merkitsee, että $id\colon(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},g)$ on (tasaisesti) jatkuva. Käänteiskuvauksen $id\colon(\mathbb{R},g)\to(\mathbb{R},d)$ (tasainen) jatkuvuus osoitetaan samoin käyttäen kuvauksen $t\mapsto t^2$ jatkuvuutta origossa: jokaista $\epsilon^2>0$ vastaa $\delta^2>0$, jolla $|x-y|^2<\epsilon^2$, kunhan $|x-y|<\delta^2$. Toisin sanoen $d(x,y)=|x-y|<\epsilon$, kunhan $g(x,y)=\sqrt{|x-y|}<\delta$.

(b) Metriikat g ja d *eivät ole* bilipschitz-ekvivalentit. Tämä nähdään siitä, että

$$\frac{d(x,y)}{g(x,y)}=\frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|}}=\sqrt{|x-y|}\to\infty,\quad\text{kun}\quad |x-y|\to\infty.$$

Jos metriikat olisivat bilipschitz-ekvivalentit, esimerkiksi $ag(x,y)\le d(x,y)\le bg(x,y)$, kyseisellä suhteella olisi yläraja $b<\infty$.

Tehtävä 5. *Olkoon* $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *jatkuva* positiivinen *funktio. Osoita, että yhtälö* $f(x,y)=(x,g(x)y)$ *määrittelee homeomorfismin* $f\colon\mathbb{R}^2\approx\mathbb{R}^2$ *ja anna käänteiskuvauksen lauseke. Olkoon* $g(x)=e^x$, *ja olkoot* A *ja* B *vaakasuoria suoria. Osoita, että* $d(fA,fB)=0$ *ja päättele, ettei* $d(A,B)>0$ *ole topologinen ominaisuus. Osoita toisaalta, että* $d(x,A)>0$ on *topologinen ominaisuus, kun* $x\in X$ *ja* $\emptyset\ne A\subset X$.

Ratkaisu 5. Käänteiskuvauksen $f^{-1}=h$ lauseke on $h(x,y)=(x,y/g(x))$, sillä

$$(h\circ f)(x,y)=h(x,g(x)y)=\left(x,\frac{g(x)y}{g(x)}\right)=(x,y)$$

ja

$$(f \circ h)(x,y) = f(x, y/g(x)) = \left(x, g(x)\frac{y}{g(x)}\right) = (x,y)$$

kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Funktioiden f ja h komponenttikuvaukset ovat jatkuvia (erityisesti $(x,y) \mapsto y/g(x)$ on jatkuva, sillä g on jatkuva ja *positiivinen*), joten f ja h ovat jatkuvia. On osoitettu, että f on homeomorfismi.

Olkoot sitten $A = \{(x,y) : y = a\}$ ja $B = \{(x,y) : y = b\}$ vaakasuoria suoria, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Silloin $d(A,B) = |a-b| > 0$, mutta

$$|f(x,a) - f(x,b)| = |(x, e^x a) - (x, e^x b)| = e^x|a-b| \to 0,$$

kun $(x,a) \in A$, $(x,b) \in B$ ja $x \to -\infty$, joten $d(fA, fB) = 0$. Yleislauseen 9.15 nojalla kaikki topologiset ominaisuudet säilyvät homeomorfismeissa, joten $d(A,B) > 0$ *ei voi olla* topologinen ominaisuus. Toisaalta ominaisuus $d(x,A) > 0$ on topologinen, sillä se voidaan lausua avoimien joukkojen avulla: $d(x,A) > 0$, jos ja vain jos on olemassa avoin joukko U (pieni pallo $B(x,r)$ kelpaa), jolla $x \in U$ ja $U \cap A = \emptyset$.

Tehtävä 6. *Tarkastellaan funktioavaruutta $E = C([0,1],\mathbb{R})$. Olkoot d ja e normien $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ ja $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ antamat metriikat. Osoita, että $\tau_e \subset \tau_d$. Entä käänteinen inkluusio?*

Ratkaisu 6. Inkluusio $\tau_e \subset \tau_d$ on yhtäpitävä kuvauksen $id\colon (E,d) \to (E,e)$ on jatkuvuuden kanssa. Tämä seuraa heti arviosta

$$e(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \leq \|f-g\|_\infty = d(f,g), \quad f,g \in E.$$

joka kertoo, että $id\colon (E,d) \to (E,e)$ on jopa 1-Lipschitz. Sen sijaan $\tau_d \not\subset \tau_e$. Tarkastellaan esimerkiksi kuvauksia $f_n \in E$, $f_n(t) = t^n$. Näillä $d(f_n, \bar{0}) = \|f_n\|_\infty = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, mutta $e(f_n, \bar{0}) = \|f_n\|_1 = (n+1)^{-1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämä merkitsee, ettei $id\colon (E,e) \to (E,d)$ ole jatkuva origossa (yksikään pallo $B_e(\bar{0}, \epsilon)$ ei sisälly palloon $B_d(\bar{0}, 1)$).