Harjoitukset 2
Malliratkaisut (Tuomas Orponen)

Tehtävä 1. *Todista, että avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *tavallinen pistetulo toteuttaa ehdot (S1)–(S5).*

Ratkaisu: Seuraavassa $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(S1) Tavallinen kertolasku on vaihdannainen, joten

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = y \cdot x.$$

(S2) Koska $ax = (ax_1, \ldots, ax_n)$, saadaan

$$(ax) \cdot y = \sum_{j=1}^{n} (ax_j) y_j = a \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right) = a(x \cdot y).$$

(S3) Koska $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, saadaan

$$(x+y) \cdot z = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) z_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j z_j + y_j z_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = x \cdot z + y \cdot z.$$

(S4) Koska $x_j^2 \geq 0$ kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$, on myös

$$x \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0.$$

(S5)

$$x \cdot x = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0 \iff x_j^2 = 0 \text{ kaikilla } j \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\iff x_j = 0 \text{ kaikilla } j \in \{1, \ldots, n\} \iff x = \bar{0}.$$

Tehtävä 2. *Olkoot* $x = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ *ja* $y = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$ *sekä* $a = -2$. *Käyttäen tavallista pistetuloa ja normia, määritä* (a) $a(x - y)$, (b) $a|x - y|$, (c) $|a|(|x| - |y|)$, (d) $a(x \cdot y)$, (e) $|a||x||y|$, (f) $x \cdot ay$.

Ratkaisu:

(a)
$$a(x - y) = -2[(1, -1, 2) - (1, -2, 1)] = -2(0, 1, 1) = (0, -2, -2).$$

(b) Koska $a < 0$, on $a = -|a|$. Siten

$$\begin{aligned} a|x - y| &= -|a||x - y| = -|a(x - y)| \\ &= -\sqrt{a(x - y) \cdot a(x - y)} \overset{(a)}{=} -\sqrt{(0, -2, -2) \cdot (0, -2, -2)} \\ &= -\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(c) Koska

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{(1,-1,2) \cdot (1,-1,2)} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

ja

$$|y| = \sqrt{y \cdot y} = \sqrt{(1,-2,1) \cdot (1,-2,1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

saadaan

$$|a|(|x| - |y|) = |2|(\sqrt{6} - \sqrt{6}) = 0.$$

(d)

$$a(x \cdot y) = -2((1,-1,2) \cdot (1,-2,1)) = -2(1 + 2 + 2) = -10.$$

(e) Kohdassa (c) laskettiin, että $|x| = \sqrt{6} = |y|$, joten $|a||x||y| = 2\sqrt{6}\sqrt{6} = 12$.

(f) Käytämme pistetulon laskusääntöjä ja kohtaa (d):

$$x \cdot ay \overset{(S1)}{=} ay \cdot x \overset{(S2)}{=} a(y \cdot x) \overset{(S1)}{=} a(x \cdot y) \overset{(d)}{=} -10.$$

Tehtävä 3. *Olkoon E reaalikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoot $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sekä $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sen kaksi sisätuloa. Osoita, että myös kuvaus $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$,*

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_1 + \langle x, y \rangle_2,$$

on sisätulo.

Ratkaisu: Tarkistetaan, että $\langle \cdot, \cdot \rangle$ toteuttaa sisätulon viisi aksioomaa. Seuraavassa $x, y, z \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(S1)

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_1 + \langle x, y \rangle_2 = \langle y, x \rangle_1 + \langle y, x \rangle_2 = \langle y, x \rangle.$$

(S2)

$$\langle ax, y \rangle = \langle ax, y \rangle_1 + \langle ax, y \rangle_2 = a\langle x, y \rangle_1 + a\langle x, y \rangle_2 = a(\langle x, y \rangle_1 + \langle x, y \rangle_2) = a\langle x, y \rangle.$$

(S3)

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x + y, z \rangle_1 + \langle x + y, z \rangle_2 \\ &= [\langle x, z \rangle_1 + \langle y, z \rangle_1] + [\langle x, z \rangle_2 + \langle y, z \rangle_2] \\ &= [\langle x, z \rangle_1 + \langle x, z \rangle_2] + [\langle y, z \rangle_1 + \langle y, z \rangle_2] = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

(S4) Koska $\langle x, x \rangle_1 \geq 0$ ja $\langle x, x \rangle_2 \geq 0$, on oltava myös

$$\langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle_1 + \langle x, x \rangle_2 \geq 0.$$

(S5) "$\Rightarrow$": Jos $\langle x, x \rangle = 0$, niin

$$0 \leq \langle x, x \rangle_1 \leq \langle x, x \rangle_1 + \langle x, x \rangle_2 = \langle x, x \rangle = 0,$$

joten $\langle x, x \rangle_1 = 0$. Koska $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ on sisätulo, on oltava $x = 0$.

"$\Leftarrow$": Jos $x = 0$, niin $\langle x, x \rangle_1 = 0$ ja $\langle x, x \rangle_2 = 0$, joten myös

$$\langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle_1 + \langle x, x \rangle_2 = 0.$$

Tehtävä 4. *Olkoon* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *sisätuloavaruus. Joukon* $A \subset E$ ortokomplementti *on joukko*

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita, että $A^{\perp}$ *on avaruuden* E *vektorialiavaruus.*

Ratkaisu: Todistetaan, että $A^{\perp}$ toteuttaa kaikki kolme aliavaruuspostulaattia.

(1) Olkoot $x, y \in A^{\perp}$. Jos $z \in A$ on mielivaltainen, niin sisätulon laskusäännön (S3) nojalla

$$\langle x + y, z \rangle \overset{(S3)}{=} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Siten $x + y \in A^{\perp}$.

(2) Olkoon $x \in A^{\perp}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Jos $z \in A$ on mielivaltainen, niin sisätulon laskusäännön (S2) nojalla

$$\langle ax, z \rangle \overset{(S2)}{=} a\langle x, z \rangle = 0.$$

Siten $ax \in A^{\perp}$.

(3) Lopulta haluamme todistaa, että $\bar{0} \in A^{\perp}$. Osoitetaan ensin käyttäen vektoria-varuuden aksioomia (3), (6) ja (7), että $\bar{0} = 0\bar{0}$:

$$\bar{0} \overset{(7)}{=} 1\bar{0} = (1 + 0)\bar{0} \overset{(6)}{=} 1\bar{0} + 0\bar{0} \overset{(7)}{=} \bar{0} + 0\bar{0} \overset{(3)}{=} 0\bar{0}.$$

Nyt sisätulon laskusäännöstä (S2) nähdään, että mielivaltaiselle $z \in A$ pätee

$$\langle \bar{0}, z \rangle = \langle 0\bar{0}, z \rangle \overset{(S2)}{=} 0\langle \bar{0}, z \rangle = 0.$$

Siis $\bar{0} \in A^{\perp}$.

Tehtävä 5. (a) *Olkoon* $0 \neq w \in \mathbb{C}$. *Mikä on yksiön* $\{w\}$ *ortokomplementti kompleksitasossa (varustettuna kompleksisella sisätulolla)?*

(b) *Olkoon* $w = (1, 1 + i) \in \mathbb{C}^2$. *Mikä on yksiön ortokomplementti* $\mathbb{C}^2$*:ssa (varustettuna kompleksisella sisätulolla)?*

Ratkaisu: (a) Yksiön $\{w\}$ ortokomplementti on määritelmän mukaan joukko $\{w\}^{\perp} = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{w} = 0\}$.[1] Jos kerran $w \neq 0$, myös $\bar{w} \neq 0$. Siten yhtälö $z\bar{w} = 0$ voi toteutua, jos ja vain jos $z = 0$. Siis $\{w\}^{\perp} = \{0\}$.

(b) Yksiön $\{w\} = \{(1, 1 + i)\}$ ortokomplementti on jälleen muotoa $\{w\}^{\perp} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z \cdot w = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 = 0\}$, missä $w = (w_1, w_2) = (1, 1 + i)$, ja siis $\bar{w}_1 = 1$, $\bar{w}_2 = 1 - i$. Kirjoitetaan $z = (z_1, z_2)$, missä $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Silloin

$$z \cdot w = 0 \iff z_1 + (1 - i)z_2 = 0 \iff z_1 = iz_2 - z_2.$$

Tämä osoittaa, että $\{w\}^{\perp} = \{(iz - z, z) : z \in \mathbb{C}\} = \{(i - 1, 1)z : z \in \mathbb{C}\}$. Kyseessä on siis vektorin $(i - 1, 1)$ virittämä yksiulotteinen aliavaruus.

[1] Tässä $\bar{w}$ on kompleksiluvun $w = x + iy$ *liittoluku*, eli $\bar{w} = x - iy$. Huomaa, että kaava $\langle z, w \rangle = zw$ *ei määrittele* sisätuloa kompleksitasossa, sillä $\langle z, z \rangle = z^2$ ei yleensä ole reaalinen tai varsinkaan ≥ 0. Siksi lukujen $z, w \in \mathbb{C}$ kompleksinen pistetulo määritellään kaavalla $z \cdot w = z\bar{w} \in \mathbb{C}$. Avaruudessa $\mathbb{C}^n$ määritellään vastaavasti $z \cdot w = \sum z_k\bar{w}_w$, kun $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.