Tariffiteorian laskuharjoitus 8, 11.5.2010
Huom. Harjoitus on poikkeuksellisesti tiistaina klo 16-18, sali C123

Tehtävissä 3-5 $Y_n = V_1 + \cdots + V_n$ ja $T = \inf\{n; Y_n > U_0\}$ ($T = \infty$, jos $Y_n \leq U_0, \forall n$).

1. Luovutaan lauseessa 6.2 oletuksesta $d(t) < \infty, \forall t \in (0, R)$. Merkitään

$$R_d = \sup\{t \geq 0; d(t) < \infty\}$$

ja oletetaan, että $0 \leq R_d < R$. Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R_d.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R_d.$$

3. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$P_n = N^{-1}(X_{n-1} + \cdots + X_{n-N}) + v,$$

missä $N \in \mathbb{N}$ on kiinteä ja $X_0, X_{-1}, \ldots, X_{-N+1}$ ovat deterministisiä vakioita. Olkoon $V_n = X_n - P_n$. Oletetaan, että $\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -\infty.$$

4. Olkoon

$$X_n = \left(1 + a \sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right)\right) \xi_n,$$

missä $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja $0 \leq a < 1$ ja $k \in \mathbb{N}$ ovat vakioita. Olkoon c_ξ muuttujan ξ_1 kumulantit generoiva funktio, $P_n = \mu + v$ ja $V_n = X_n - P_n$, missä $\mu = \mathbb{E}(\xi_1)$ ja $v > 0$ on vakio. Oletetaan, että $c_\xi(t) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$. Määrää rajafunktio c,

$$c(t) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vastaus: $c(t) = k^{-1} \sum_{j=1}^{k} c_\xi \left(t + at \sin\left(\frac{2\pi j}{k}\right)\right) - (\mu + v)t$.

5. (Jatkoa) Tarkastellaan Lundbergin eksponenttia $R = R(a)$ parametrin a funktiona. Osoita, että $R(0) \geq R(a)$, $\forall a \in [0, 1]$.
Ohje: konveksille funktiolle f pätee:

$$f(\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_k t_k) \leq \lambda_1 f(t_1) + \cdots + \lambda_k f(t_k),$$

kun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ ja $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$.