Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 3, 25.2.2010

1. Olkoon Y'_n kuten kohdassa 4, kaava (4.1), ja

$$Y'_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} d_1 \cdots d_{i-1} \xi_i.$$

Okoon $U_0 > 0$ alkupääoma ja $T(U_0) = \inf\{n | Y'_n > U_0\}$ vararikkohetki. Osoita, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) \leq \mathbb{P}(T(U_0) < \infty).$$

Tehtävässä oletetaan tunnetuksi, että Y'_∞ on hyvin määritelty toisin sanoen, että määrittelevä sarja suppenee m.v.

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) \geq \mathbb{P}(T(U_0) < \infty)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > 0).$$

3. (jatkoa) Olkoon

$$\mathbb{P}(\log d_n = -1) = p \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\log d_n = 1) = 1 - p, \quad n \in \mathbb{N},$$

missä $p \in (1/2, 1)$. Olkoon edelleen $\xi_n = -1 + d_n$ (tällöin d_n ja ξ_n eivät ole riippumattomia, mutta tehtävien 1 ja 2 tulokset pätevät). Määrää Y_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, Y'_∞ ja

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0) < \infty).$$

4. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että $\mu = \mathbb{E}(\xi)$ ja $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(\xi)$ ovat äärellisinä olemassa. Olkoon $a > \mu$ ja (x_n) sellainen reaalilukujono, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_j \leq n(a - \mu + x_n n^{-1/2}), \forall j = 1, \ldots, n) = 1$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n > n(\mu - x_n n^{-1/2})\right) = 1.$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \geq (1 + o(1)) n \bar{F}\left(n(a - \mu + x_n n^{-1/2})\right), \quad n \to \infty.$$