Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 2, 18.2.2010

1. Olkoon

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_i > x) = -\alpha, \quad i = 1, 2,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Osoita, että jos ξ_1 ja ξ_2 ovat ei-negatiivisia, niin

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) = -\alpha$$

(ei siis oleteta, että ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia).

2. (jatkoa) Osoita esimerkin avulla, että voi olla

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) < -\alpha,$$

jos ξ_1 ja ξ_2 voivat saada myös negatiivisia arvoja.

3. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$. Olkoon U_0 alkupääoma ja $T = \inf\{n | Y_n > U_0\}$ vararikkohetki. Oletetaan, että

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\bar{\alpha}$$

ja

$$\liminf_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\underline{\alpha}$$

missä $1 < \bar{\alpha} < \underline{\alpha} < \infty$. Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq U_0) \leq 1 - \bar{\alpha}.$$

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq U_0) = 1 - \bar{\alpha}.$$

5. (jatkoa) Esitä esimerkki jakaumasta, jolle $1 < \bar{\alpha} < \underline{\alpha} < \infty$.