Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 1, 4.2.2010

1. Olkoon $\{S_n\}$ uusiutumisprosessi, $S_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, ja U tätä vastaava uusiutumisfunktio. Oletetaan, että η_1:n jakauma F ei ole aritmeettinen ja että $\mu = \mathbb{E}(\eta_1)$ ja $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(\eta_1)$ ovat äärellisiä. Olkoon

$$z(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty (1 - F(y))\, dy, \quad x \geq 0.$$

Osoita, että

$$Z(x) = U(x) - \frac{x}{\mu}$$

on uusiutumisyhtälön

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\, dF(y)$$

ratkaisu alueessa $x \geq 0$.

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\int_0^\infty z(x)\, dx = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

3. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{x \to \infty} \left(U(x) - \frac{x}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2}.$$

4. Tarkastellaan kohdan 2.3 merkinnöin Sparre-Andersenin mallia olettaen erityisesti, että sattumisväli V on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla λ. Tällöin tunnetusti $\{N(t) | t \geq 0\}$ on Poisson-prsosessi intensiteettinä λ. Olkoon c_1 muuttujan $Y^c(1)$ kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että yhtälöllä $c_1(s) = 0$ on täsmälleen yksi positiivinen juuri $s = R$. Olkoon $x > 0$ kiinteä. Oletetaan, että $c_1'(t) = 1/x$ eräälle $t > R$.

Olkoon $\Delta > 0$ ja

$$T_\Delta = \inf\{t \mid Y^c(t) > U_0,\ t = \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots\}$$

vararikkohetki, kun yhtiön tila tarkastetaan hetkinä $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T_\Delta \leq xU_0) \leq e^{-xc_1^*(1/x)U_0}, \quad \forall\, U_0 > 0.$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T^c \leq xU_0) = -xc_1^*(1/x).$$