OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 9
KEVÄT 2010

1. Osoita, että Laplace–yhtälö pallokoordinaateissa on

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \tag{1}$$

(luentojen kaava (8.34)).

2. Totea Legendren polynomien ortogonaalisuusominaisuus (8.46) muutamille alimman asteen polynomeille.

3. Tekemällä Legendren liittoyhtälöön

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \Big(\mu - \frac{m^2}{1-t^2}\Big)y = 0. \tag{2}$$

tapauksessa $m = 0$ potenssisarjayrite

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (t-1)^k$$

johda kertoimille c_k palautuskaava

$$c_{k+1} = -\frac{k(k+1)-\mu}{2(k+1)^2}c_k$$

4.–5. Ratkaise Fourierin menetelmällä formaalisti reuna–arvo–ongelma suorakulmiossa $\Omega := [0,a]\times[0,b]\subset \mathbf{R}^2$,

$$\Delta u = 0 \qquad \text{joukossa } \Omega,$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \ \text{ kun } 0\le y\le b,$$
$$u(x,0) = 0 \ , \ \text{ kun } 0\le x\le a,$$
$$u(x,b) = f(x) \ , \ \text{ kun } 0\le x\le a,$$

missä $f : [0,a]\to\mathbf{R}$ on annettu jatkuva funktio.