OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 8
KEVÄT 2010

1. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia tasossa tai sen jossakin osa–aluessa ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $e^{x^2-y^2}$,

b) $\sin(5x)e^{5y}$,

c) $x/(x^2 - y^2)$,

d) x^{10} ?

2. Johda (ominaisarvo)differentiaaliyhtälöt funktioille $R(r)$ ja $T(\theta)$, kun yrite $u(r, \theta) := R(r)T(\theta)$ toteuttaa Laplace yhtälön napakoordinaateissa (ks. luentojen kaavat (8.19) ja (8.20)).

3. Osoita luentojen kaava (8.28),

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

4. Tarkastellaan ns. Poissonin kaavaa ylemmässä puolitasossa, ja sen määrittelemää funktiota

$$u(x, y) := \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi,$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$.
Olettaen, että f on joukossa $\mathbf{R}$ jatkuva lukuunottamatta äärellistä määrää epäjatkuvuuspisteitä ja että $|f(x)| \leq (1 + |x|)^{-3}$ kaikilla x, osoita, että u on harmoninen ylemmässä puolitasossa.

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tarkastellaan tapausta, että f on jonkin suljetun välin $[a, b] \subset \mathbf{R}$ karakteristinen funktio: $f(x) = 1$, jos $x \in [a, b]$, ja $f(x) = 0$ muulloin.
Osoita, että tällöin

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x)$$

lukuunottamatta mahdollisesti välin $[a, b]$ päätepisteitä.