OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 7
KEVÄT 2010

1. Tarkastellaan kuvauksia
a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{5}$,
b) $f(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{x}{3}$.
Etsi sellainen suljettu $\mathbf{R}$:n osajoukko B, jossa f on kontraktio ja jolle $f(B) \subset B$. Joukossa $\mathbf{R}$ tavanomainen metriikka $d(x, y) := |x - y|$. Sovellutukset yhtälöiden ratkaisuihin?

2. Osoita, että kuvaus S,

$$S(f)(t) = t^2 + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t+s)^2} f(s)ds$$

on kontraktio Banach–avaruudessa $C(0, 1)$, joka koostuu jatkuvista funktioista $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, normina sup–normi. (Ottaen huomioon $C(0, 1)$:n normin määritelmän, sinun tulisi siis löytää jokin ykköstä pienempi positiiviluku C, jolle

$$|S(f)(t) - S(g)(t)| \le C\|f - g\|_\infty (= C \sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)|) \quad \text{kaikilla } t \in [0, 1].$$

Tämä ei ole erityisen vaikeaa: kirjoita auki lauseke $|S(f)(t) - S(g)(t)|$ ja tee suoraviivaisia arvioita ylöspäin.) Sovellutus yhtälöön $f = S(f)$?

3. Etsi avaruuden $C(0, 1)$ suljettu pallo eli muotoa $B := \bar{B}(g, r) := \{f \in C(0, 1) \mid \|f - g\|_\infty \le r\}$ oleva osajoukko, jossa kuvaus

$$S(f)(t) = \frac{1}{5}t^4 + \int_0^t e^{-(t+s)^2} f(s)^2 ds$$

on kontraktio ja jolle pätee $S(B) \subset B$. Sovellutus yhtälöön $f = S(f)$? Huomautus. Tehtävä 1 a) auttaa.

4. Käy läpi yksityiskohtaisesti Greenin kaavojen (8.2) ja (8.3) johtaminen divergenssikaavasta.

5. Osoita laskulla, että funktiot $\log(1/|\bar{x} - \bar{y}|)$ (kun $\bar{x}$ ja $\bar{y} \in \mathbf{R}^2$) ja $|\bar{x} - \bar{y}|^{n-2}$ (kun $\bar{x}$ ja $\bar{y} \in \mathbf{R}^n$, $n \ge 3$) ovat kiinteällä $\bar{y}$ harmonisia muuttujan $\bar{x}$ funktioita (alueessa, jossa $\bar{x} \ne \bar{y}$).