OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 6
KEVÄT 2010

1. Ratkaise Fourier-sarjamenetelmällä aaltoyhtälön probleema välillä $I := [0,1] \subset \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \quad , \quad x \in I \ , t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(4\pi x) \quad , \quad x \in I, \\ u_t(x,0) &= 0 \quad , \quad x \in I. \end{aligned}$$

Laske ratkaisun u energiafunktionaalin arvo ja totea, että se tosiaankin on vakio ajan suhteen.

2. Merkitään $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ ja $u = u(\bar{x},t) = u(x,y,z,t)$. Tarkastellaan seuraavaa aaltoyhtälön Cauchyn probleema $\mathbf{R}^3$:ssa:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \ , \ t > 0, \\ u(\bar{x},0) &= 0 \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(\bar{x},0) &= \phi(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

Laske ratkaisukaavasta funktion u arvo pisteessä $\bar{x} = 0$ ajanhetkellä t, kun $\phi(\bar{x}) = |\bar{x}|^2$, jos $|\bar{x}| \leq 1$, ja $\phi(\bar{x}) = 0$, jos $|\bar{x}| > 1$ (itseisarvo = vektorin pituus).

3. Oletetaan, että funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva (vähempikin riittäisi). Johda derivaatan määritelmästä derivointikaava

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,s)ds = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} ds$$

4. Miten derivoit:

$$\frac{d}{dt}\int_{-t}^0 f(t,s)ds$$

ja

$$\frac{d}{dt}\int_t^{3t+t^3} f(t,s)ds,$$

olettaen, että f on kuten edellisessä tehtävässä?

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ riittävän sileä funktio. Osoita, että

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{|\bar{\xi}| \leq t} f(\bar{\xi})d\bar{\xi} = \int\limits_{|\bar{\xi}| = t} f(\bar{\xi})d\sigma(\bar{\xi}),$$

missä integrointeihin liittyvät merkinnät ovat kuten luentojen kohdissa (6.34)–(6.35).