OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 5
KEVÄT 2010

1. Osoita (suorilla laskuilla), että tapauksessa $\bar{x} := (x, y) \in \mathbf{R}^2$ aaltoyhtälö napakoordinaateissa on

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}, \tag{1}$$

eli jos $u = u(x, y, t)$ toteuttaa aaltoyhtälön, niin funktio $v(r, \theta, t) := u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$ toteuttaa yhtälön (1). Tässä $r > 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Merkitään $\bar{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ja $u = u(\bar{x}, t) = u(x, y, t)$. Ratkaise seuraava aaltoyhtälön Cauchyn probleema $\mathbf{R}^2$:ssa käyttäen d'Alembertin kaavaa (funktio u vakio 1. koordinaatin suhteen):

$$u_{tt} = \Delta u \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^2 \ , t > 0,$$

$$u(\bar{x}, 0) = \sin y \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^2,$$

$$u_t(\bar{x}, 0) = \cos y \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^2,$$

3. Olkoon $L := 1$. Laske funktion $f(x) = 1 + x$ Fourier–sinikertoimet välillä $[0, L] = [0, 1]$. Miksi ne eivät toteuta esimerkiksi Lemman 6.2. suppenemiskriteerioita, vaikka f on C^∞–funktio?

4.–5. Ratkaise formaalisti Fourier–sarja–menetelmällä alkuarvo–reuna–arvotehtävä

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) \quad , \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$

$$u_t(x, 0) = 1 + \cos^3 x \quad , \quad 0 \le x \le \pi.$$

Vastaus:

$$u(x, t) = \sin t + \frac{3\sqrt{2}}{8} \cos x \sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{10}}{40} \cos 3x \sin \sqrt{10}t.$$