OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 4
KEVÄT 2010

1. Tässä esimerkissä esiintyy shokkiratkaisu, vaikka alkuehtofunktio on jatkuva: Tarkastele viskoositonta Burgersin yhtälöä $uu_x + u_y = 0$, alkuehdolla $u(x, 0) = h(x)$, missä $h(x) = a \ \ (> 0$, vakio), kun $x \leq 0$, $h(x) = a(1 - x)$, kun $0 < x < 1$, ja $h(x) = 0$, kun $x \geq 1$. Ajatellaan, että y kuvaa aikaa. Osoita, että jollakin ajanhetkellä syntyy shokki. Millainen on yhtälön heikko ratkaisu?

2. Onko seuraava kahden muuttujan funktiota $u = u(x, y)$ koskeva osittaisdifferentiaaliyhtälö elliptinen, hyperbolinen vai parabolinen:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + \sin(u) = 3 \ ? \tag{1}$$

3. Tee lineaarinen muuttujan vaihto $\xi := \xi(x, y)$ ja $\eta := \eta(x, y)$ (käänteismuunnoksena $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$) ja kirjoita (1) uudelle funktiolle $v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ kanonisessa muodossa eli siten, että termin $v_{\xi\eta}$ kerroin on 0.

4. Mitä tyyppiä (elliptinen, ...) ovat seuraavat yhtälöt ($u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$)?

$$e^{-|x|^2} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + (u_{x_1})^3 = 0$$

$$u_{x_1x_1} - 2e^{-|x|^2} u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 0$$

$$(1 - |x|)u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + u = 0$$

5. Totea, että yhtälö ($u = u(x, y)$)

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 24u_{yy} = 0 \tag{2}$$

on hyperbolinen. Itse asiassa, lineaarisella muuttujanvaihdolla sen voi muuntaa kahden muuttujan aaltoyhtälöksi. Tee näin, ja kirjoita (2):n yleinen ratkaisu alkuperäisisten muuttujien suhteen käyttäen d'Alembertin ratkaisua.