OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 3
KEVÄT 2010

1. Ratkaise seuraava 1. kertaluvun ODY:n alkuarvotehtävä ($u = u(x, y)$), ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa:

$$u_x + u^2 u_y = 1, \quad u(x, 0) = 1.$$

2. Osoita derivoimalla, että lämpöyhtälön Cauchyn probleeman ratkaisu $\mathbf{R}$:ssä (luentojen kaava (3.33)) todellakin toteuttaa lämpöyhtälön, kun $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on rajoitettu, jatkuva funktio.

3. Laske kaavasta (3.33) lämpöyhtälön Cauchyn probleeman ratkaisu, kun $\phi(x) = e^{-x^2}$.

4. Osoita derivoimalla, että jos $h : \mathbf{R} \times [0, \infty[\to \mathbf{R}$ on annettu jatkuva ja rajoitettu funktio, niin Cauchyn probleeman

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + h(x, t) \quad , \; x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad , \; x \in \mathbf{R}$$

ratkaisu on

$$u(x, t) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t - \tau)}} \exp\Big(\frac{-(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\Big) h(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

5. Toteuttaako yhtälön

$$u_t = 10\, u_{xx} + \sin(xt) u_x$$

ratkaisufunktio $u = u(x, t)$ joukossa $\Omega := \{(x, t) \mid 0 < x < L, 0 < t < T\}$ (mikäli olemassa) Lauseen 3.3 heikon maksimiperiaatteen? (Määrittele käyttäen yksinkertaista muuttujanvaihtoa u:n avulla apufunktio v, joka toteuttaa Lauseessa 3.3. esiintyvän yhtälön, ja tutki, toteutuuko ko. yhtälössä oletus funktiosta b.)