OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 2
KEVÄT 2010

1. Osoita, että

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \delta_{nm}$$

kaikilla n, $m \in \mathbf{N}$, missä δ_{nm} on Kroneckerin delta, eli yhtä kuin 0, jos $m \neq n$, ja 1, jos $m = n$.

2.–3. Käy läpi luennolla esitetty lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleeman (PAR)–(EH) ratkaisu, kun $L = 1$, reunafunktiot ovat $g_1(t) = 1$ ja $g_2(t) = e^{-t}$ ja alkuarvo $\phi(x) = 1$. Laske eksplisiittisesti menetelmässä esiintyvät Fourier–kertoimet. Mihin funktioon $h(x)$ ratkaisu $u(x,t)$ suppenee, kun $t \to \infty$?

4.–5. Esitä (formaalisti, ilman sarjojen suppenemistodistuksia yms.) Fourier–sarjoihin perustuva ratkaisumenetelmä seuraavalle lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvo–probleemalle *Neumann–tyyppisillä reunaehdoilla*:

$$u_t = u_{xx}\ , \quad x \in]0,L[\ ,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \phi(x)\ , \quad x \in [0,L],$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\ , \quad t \geq 0.$$

Tässä $L > 0$ annettu, kiinteä luku, $\phi : [0,L] \to \mathbf{R}$ annettu jatkuvasti derivoituva alkuarvofunktio, joka toteuttaa myös reunaehdot. Reunaehdossa on toispuoliset derivaatat.
Ratkaise probleema siinä tapauksessa, että $L = \pi$ ja $\phi(x) = (\sin x)^2$.
Neuvo. Mallina on tietysti luentojen (PAR)–(REU) ongelman ratkaisu. Uudenlaisten reunaehtojen käsittelemiseksi huomaa, että Lause 3.1 pätee, ilman reunaehtoja f:lle, jos sini korvataan kosinilla. (Saatu “Fourierin kosinisarja” suppenee ainakin pisteittäin kaikilla $x \in]0,L[$.)