OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 11
KEVÄT 2010

1. Etsi ominaisarvoja λ ja ominaisfunktioita $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f \neq 0$, jotka ovat integraaliyhtälön

$$\lambda f(x) - \int_0^\pi K(x,y) f(y) dy = 0 \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

ratkaisuja, kun $K(x,y) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2} \sin(nx)\sin(ny)$. (Käytä trigonometristen funktioiden ortogonaalisuutta.)

2.–3. Onko integraaliydin

k) $K(s,t) = 1 + \sin(\pi(s+t))$,

e) $K(s,t) = e^{-(s-t)}$

s) $K(s,t) = e^{-|s-t|}$

ä) $K(s,t) = e^{-(s-t)^2}$

(s, $t \in [0,1]$) degeneroitunut, eli muotoa

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^n M_j(s) N_j(t) \tag{1}$$

jollekin $n \in \mathbf{N}$ ja joillekin funktioille $M_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ ja $N_j : [0,1] \to \mathbf{R}$? Kohdassa s) riittää perusteltu arvaus.

Jos vastaus on positiivinen, ortonormita jono $(N_j)_{j=1}^n$ avaruuden $L^2([0,1])$ sisätulon $(\phi|\psi) := \int_0^1 \phi(s)\psi(s)ds$ suhteen, ja esitä ydin K muodossa (1) tämän uuden jonon avulla.

4.–5. Osoita, että yksikerrospotentiaali

$$u(\bar{x}) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \psi(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} d\sigma(\bar{y})$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$, kun $\psi \in C^1(\partial\Omega)$ ja Ω toteuttaa luentojen luvussa 9 tehdyt geometriset oletukset.
Ohje. On osoitettava, että kaikilla $\bar{x}_0$,

$$\lim_{\bar{x} \to x_0} u(\bar{x}) = u(\bar{x}_0),$$

missä $\bar{x}$ on joko sisä– tai ulkoalueessa. Käytä luentojen kaavaa (9.13) (joka pätee kaikilla $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$) ja ota siinä sellainen funktio $v \in C^2(\bar{\Omega})$, että $v(\bar{x}) = 0$ joukossa $\partial\Omega$ ja $\partial_\nu v(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$ joukossa $\partial\Omega$. On käytettävä tietoa, että pintaintegraalitermi on jatkuva $\bar{x}$:n funktio, mikä seurasi Poisson'n yhtälöön liittyvistä tarkasteluista luvussa 8.