OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 10
KEVÄT 2010

1. Olkoon G yksikkökiekon Greenin funktio,

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \log\Big(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x} - r^2\bar{y}|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\Big),$$

vertaa luentojen kaava (8.63); tässä $r = |\bar{x}|$. Laske tämän normaaliderivaatta kiekon reunalla, $\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x}, \bar{y})$ ja vertaa tulosta Poisson'n ytimen lausekkeeseen; kaavat (8.26) ja (8.60) .

2. Seuraavan Fredholmin integraaliyhtälön ratkaisu on enintään toisen asteen polynomi. Etsi ratkaisu (alkeellisesti) sijoittamalla tällainen polynomi yhtälöön ja ratkaisemalla siitä kertoimet.

$$\phi(s) = s + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (s + t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [-1, 1],$$

3. Ratkaise yhtälö

$$\phi(s) = 1 + \int_{0}^{2\pi} \cos(s - t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [0, 2\pi].$$

4.–5. Olkoon $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega$, harmoninen funktio rajoitetussa tasoalueessa Ω sekä $u \in C(\bar{\Omega})$. Osoita, että jos $\bar{x} \in \Omega$, niin

$$|\nabla u(\bar{x})| \leq \frac{C}{d},$$

missä d on $\bar{x}$:n etäisyys Ω:n reunasta $\partial\Omega$ ja $C > 0$ on jokin $\bar{x}$:stä riippumaton vakio. Neuvo. Osoita keskiarvolauseen avulla, että pätee

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi\varrho^2} \int_{B(\bar{x},\varrho)} u(\bar{y})d\bar{y}$$

sopivilla $\varrho > 0$ ja sovella tätä kaavaa u:n osittaisderivaattoihin, jotka ovat harmonisia funktioita.