① $f(x,y,z) = x^2ye^{2z} + \sin(xyz)$. Koska f on (selvästi) jatkuvasti derivoituva, se on differentioituva (kaikkialla) (Lause 3.39). Differentioituva funktio kasvaa nopeiten gradientin suuntaan (verkkomonisteen sivu 80). Nyt

$$\nabla f(x,y,z) = (D_1 f(x,y,z), D_2 f(x,y,z), D_3 f(x,y,z))$$
$$= (2xye^{2z} + yz\cos(xyz),\ x^2e^{2z} + xz\cos(xyz),\ 2x^2ye^{2z} + xy\cos(xyz))$$ ja
$$\nabla f(1,1,0) = (2,1,3).$$

Siis pisteessä $(1,1,0)$ f kasvaa nopeiten vektorin $(2,1,3)$ suuntaan.

② Funktion f osittaisderivaatat ovat jatkuvat, joten Lauseen 3.39 perusteella f on differentioituva (kaikkialla). Tasa-arvopinnan $f(x,y,z)=1$ pisteeseen $(1,1,0)$ liittyvän tangenttitason yhtälö on (verkkomonisteen sivulla 81 oleva kaava 3.43)

$$\nabla f(1,1,0)\cdot(x-1,\ y-1,\ z-0) = 0 \iff$$
$$(2,1,3)\cdot(x-1,\ y-1,\ z) = 0 \iff$$
$$2x-2+y-1+3z = 0 \iff 2x+y+3z = 3.$$

Tämän tangenttitason pisteen $(1,1,0)$ kautta kulkeva normaalisuora on vektorin $\nabla f(1,1,0) = (2,1,3)$ suuntainen ja sen parametriesitys on $(1,1,0) + t(2,1,3)$, $t\in\mathbb{R}$.

Lauseen 3.41 perusteella pisteessä $(1,1,0)$ funktion f suunnattu derivaatta suuntaan $\bar{a}$ on

$$D_{\bar{a}} f(1,1,0) = \nabla f(1,1,0)\cdot\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = (2,1,3)\cdot\bar{a}/\|\bar{a}\|.$$

Kun $\bar{a}$ on edellä olevan tangenttitason suuntainen, se on kohtisuorassa $\nabla f(1,1,0)$:ta vastaan, jolloin $\nabla f(1,1,0)\cdot\bar{a} = 0$. Siis tällöin $D_{\bar{a}} f(1,1,0) = 0$.

(3)

$$f(x,y) = x^2y^3 + 5x^3y^4 + x - 7y,$$
$$D_1 f(x,y) = 2xy^3 + 15x^2y^4 + 1,$$
$$D_{11} f(x,y) = 2y^3 + 30xy^4,$$
$$D_{12} f(x,y) = 6xy^2 + 60x^2y^3,$$
$$D_2 f(x,y) = 3x^2y^2 + 20x^3y^3 - 7,$$
$$D_{21} f(x,y) = D_{12} f(x,y) \quad \text{ja}$$
$$D_{22} f(x,y) = 6x^2y + 60x^3y^2.$$

Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} D_{11} f(x,y) & D_{12} f(x,y) \\ D_{21} f(x,y) & D_{22} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^3+30xy^4 & 6xy^2+60x^2y^3 \\ 6xy^2+60x^2y^3 & 6x^2y+60x^3y^2 \end{bmatrix},$$

$$H(-1,1) = \begin{bmatrix} 2-30 & -6+60 \\ -6+60 & 6-60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 54 \\ 54 & -54 \end{bmatrix} \quad \text{ja}$$

$$\det H(-1,1) = \begin{vmatrix} -28 & 54 \\ 54 & -54 \end{vmatrix} = (-28)\cdot(-54) - 54\cdot 54 = -1404.$$

(4) $f(x,y) = (x^2y + xy^2)/(x^2+y^2)$. Koska f on (selvästi) jatkuvasti derivoituva pisteessä $(3,4)$, se on differentioituva pisteessä $(3,4)$ (Lause 3.39). Lauseen 3.38 perusteella f:n differentiaalikehitelmä pisteessä $(3,4)$ on

$$f(3+h_1, 4+h_2) - f(3,4) = \nabla f(3,4)\cdot(h_1,h_2) + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\varepsilon(h_1,h_2),$$

missä $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$. Nyt

$$D_1 f(x,y) = \frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2) - 2x(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$D_1 f(3,4) = \frac{(24+16)(9+16) - 6(36+48)}{(9+16)^2} = \frac{1000-504}{625} = \frac{496}{625},$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(x^2+2xy)(x^2+y^2) - 2y(x^2y+xy^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$D_2 f(3,4) = \frac{(9+24)(9+16) - 8(36+48)}{(9+16)^2} = \frac{153}{625} \text{ ja}$$

$$\nabla f(3,4) = (D_1 f(3,4), D_2 f(3,4)) = \left(\frac{496}{625}, \frac{153}{625}\right).$$

Siis f:n kokonaisdifferentiaali pisteessä $(3,4)$ on

$$\nabla f(3,4)\cdot(h_1,h_2) = \frac{496}{625}h_1 + \frac{153}{625}h_2$$

ja sen osittaisdifferentiaalit samassa pisteessä ovat

$$\frac{496}{625}h_1 \text{ ja } \frac{153}{625}h_2.$$

Pisteessä $(3,4)$ funktio f vähenee nopeiten suuntaan $-\nabla f(3,4) = \left(-\frac{496}{625}, -\frac{153}{625}\right)$.

5 $f(x,y) = (2x+y^2, x+2y^2)$ ja $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (x^2y, x)$.

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$
$$= f(x^2y, x) = (2x^2y + x^2, x^2y + 2x^2),$$

$$D_1(f\circ g)(x,y) = (D_x(2x^2y+x^2), D_x(x^2y+2x^2))$$
$$= (4xy+2x, 2xy+4x) \text{ ja}$$

$$D_2(f\circ g)(x,y) = (D_y(2x^2y+x^2), D_y(x^2y+2x^2))$$
$$= (2x^2, x^2).$$

Lopuksi lasketaan vastaava ketjusäännön avulla.

$D_1 f(x,y) = (2,1)$, $D_2 f(x,y) = (2y, 4y)$, $D_1 g_1(x,y) = 2xy$,
$D_2 g_1(x,y) = x^2$, $D_1 g_2(x,y) = 1$ ja $D_2 g_2(x,y) = 0$,

joten ketjusäännön (Lause 3.46) perusteella

$$D_1(f\circ g)(x,y) = D_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y))\, D_1 g_1(x,y)$$
$$+ D_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y))\, D_1 g_2(x,y) = (2,1)\, 2xy + (2g_2(x,y), 4g_2(x,y))\cdot 1$$
$$= (4xy, 2xy) + (2x, 4x) = (4xy+2x, 2xy+4x) \text{ ja}$$

$$D_2(f\circ g)(x,y) = D_1 f(g_1(x,y), g_2(x,y))\, D_2 g_1(x,y)$$
$$+ D_2 f(g_1(x,y), g_2(x,y))\, D_2 g_2(x,y) = (2,1)\, x^2 + (2g_2(x,y), 4g_2(x,y))\cdot 0$$
$$= (2x^2, x^2),$$

(6) Merkitään $f(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2$. Tällöin tehtävän ellipsoidi on tasa-arvopinta $f(x,y,z) = 6$ ja sen pisteeseen $(1,1,-1)$ liittyvä tangenttitaso on kohtisuorassa vektoria $\nabla f(1,1,-1)$ $(\neq \bar{0})$ vastaan ja tangenttitason yhtälö on (verkkomonisteen sivulla 81 oleva kaava 3.43)

$$\nabla f(1,1,-1)\cdot(x-1, y-1, z-(-1)) = 0.$$

Nyt $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 8z)$ ja $\nabla f(1,1,-1) = (2,2,-8)$, joten kysytyn tangenttitason yhtälö on

$$(2,2,-8)\cdot(x-1, y-1, z+1) = 0 \iff$$
$$2x-2+2y-2-8z-8 = 0 \iff$$
$$2x+2y-8z = 12.$$