Lineaariset mallit, kevät 2010

Harjoitus 6, viikko 18

1. Jatkoa harjoitustehtäville 4.4 ja 5.2. Johda F-testi hypoteesille $H : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$. (Vihje: Käytä F-testisuureen jälkimmäistä residuaalineliösummiin perustuvaa esitystä (ks. s. 19).)

2. Tarkastellaan jakson 3.2 alun tilannetta (s. 19), jossa malliyhtälö on $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, \cdots, n$, ja testattava hypoteesi $H : \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$. Osoita ensin, että $\mathrm{SSE} = (1 - R^2) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$, jossa R^2 on selitysaste ja SSE on residuaalineliösumma (ks. s. 10), ja tämän perusteella edelleen, että F-testisuure edellä mainitulle hypoteesille voidaan kirjoittaa

$$F = (n-p)R^2/(p-1)(1-R^2).$$

3. Jatkoa harjoitustehtäville 4.5, 5.1 ja 5.3. Oletetaan, että hypoteesi $\mu_1 = \mu_2$ on tullut hylätyksi. Muodosta $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli erotukselle $\mu_1 - \mu_2$.

4. Jatkoa harjoitustehtäville 4.4, 5.2 ja 6.1. (i) Muodosta $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}_1$ lineaarikombinaatiolle $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ ($\boldsymbol{a} = [a_1 \cdots a_p]' \neq \mathbf{0}$). (ii) Tee sama olettaen, että $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$.

5. Oletetaan, että tavanomaisessa lineaarisessa mallissa $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma^2 > 0, r(\boldsymbol{X}) = p$) selittäjät ovat ortogonaalisia eli $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ on diagonaalimatriisi. Johda parametrin β_j PNS-estimaatti, t-testisuure hypoteesille $H : \beta_j = 0$ ja $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrille β_j (= $\boldsymbol{\beta}$:n j. komponentti). Miten nämä muuttuvat, jos mallista poistetaan joku selittäjistä x_k ($k \neq j$)?