

## Lineaariset mallit, kevät 2010

Harjoitus 5, viikko 17

1. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävälle 5. Estimoi parametrit  $\mu_1$  ja  $\mu_2$  ehdolla  $\mu_1 = \mu_2$  ottamalla ehto  $\mu_1 = \mu_2$  huomioon mallissa ja estimoimalla saadun mallin parametrit (eli käyttäen olennaisesti yhtälöön (2.9) perustuvaa vaihtoehtoista menettelyä).
2. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävälle 4. Estimoi parametri  $\beta = [\beta_1' \beta_2']'$  ehdolla  $\beta_1 = \beta_2$  PNS-menetelmän avulla. Mikä on estimaattorin  $\hat{\beta}_1$  jakauma?
3. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävälle 5. Johda  $F$ -testi nollahypoteesille  $\mu_1 = \mu_2$  ja osoita, että yhtäpitävä testi voidaan perustaa  $t_{n-2}$ -jakaumaa noudattavaan  $t$ -testisuureeseen ( $n = n_1 + n_2$ ). (Vihje: Mallin matriisiesitys (ks. monisteen s. 5),  $F$ -testisuureen yleinen lauseke (ks. monisteen s. 18) ja tulos  $F_{1,k} \sim t_k^2$ ).
4. Tarkastellaan yhden selittäjän lineaarista regressiomallia  $Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp, Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2)$ . Johda  $F$ -testi nollahypoteesille  $\beta_2 = 0$  ja osoita, että testisuure voidaan lausua (tavanomaisin merkinnöin) muodossa

$$F = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{S^2}.$$

(Vihje: Mallin matriisiesitys ja  $F$ -testisuureen yleinen lauseke (ks. monisteen s. 18). Testisuureen haetun lausekkeen johtamisessa tarvitsset myös  $2 \times 2$  matriisin käänteismatriisin laskukaavaa.)

5. Jatkoa edelliselle ja harjoituksen 2 tehtävälle 3. (i) Osoita, että edellisen tehtävän mallissa

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (1 - r_{xy}^2)(n - 1)s_y^2,$$

jossa  $r_{xy}$  on havainnoista  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , laskettu korrelaatiokerroin (ks. monisteen alaviite s. 11),  $s_y^2 = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  ja residuaalineliosumma SSE on kuten monisteen s. 10. (ii) Osoita tämän avulla, että edellisen tehtävän  $F$ -testi on yhtäpitävä seuraavan  $t$ -testin kanssa

$$\sqrt{n - 2} r_{xy} / \sqrt{1 - r_{xy}^2} \sim t_{n-2}.$$

Minkä hypoteesin testiksi tämä voidaan myös tulkita? (Vihje: Monisteen s. 10 oleva yhtälö  $SST = SSR + SSE$ , jossa SSR:ää voidaan muokata harjoituksen 2 tehtävän 3 tuloksen avulla. Muista myös, että nyt  $S^2 = SSE/(n - 2)$ ).