Lineaariset mallit, kevät 2010

Harjoitus 2, viikko 14

1. (Yksisuuntainen varianssianalyysimalli) Olkoon $Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1}, Y_{21}, \ldots, Y_{2n_2}, \ldots, Y_{p1}, \ldots, Y_{pn_p}$ riippumattomia ja $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ ($\mu_j \in \mathbb{R}$). Esitä tilanne lineaarisen mallin erikoistapauksena käyttäen lineaarisen mallin matriisiesitystä. Mikä on matriisin $\boldsymbol{X}$ aste $\mathrm{r}(\boldsymbol{X})$?

2. Olkoon $n \times n$ -neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ symmetrinen ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$) ja idempotentti ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$) (ts. $\boldsymbol{A}$ on ns. ortogonaalinen projektio). Osoita, että

   a) $\boldsymbol{A}$ on positiivisesti semidefiniitti eli $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

   b) $\boldsymbol{A}$:n aste $=$ $\boldsymbol{A}$:n jälki eli $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

   (Vihje: Pääakselihajotelma ja harjoituksen 1 tehtävä 3.

3. Esitä yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$, $Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2)$ normaaliyhtälöt komponenttimuodossa (ilman matriiseja) ja osoita, että niiden ratkaisuna saatavat PNS-estimaatit voidaan lausua muodossa

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{ja} \quad \hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x},$$

   jossa esimerkiksi $\bar{y} = (y_1 + \cdots + y_n)/n$. Esitä $\hat{\beta}_2$ käyttäen havainnoista (y_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$, laskettuja keskihajontoja ja korrelaatiokerrointa. (Huom.: Havaintojen korrelaatiokertoimen määritelmä löytyy monisteen s. 11 alaviitteestä ja esim. y-havaintojen keskihajonta on $s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$)

4. a) Olkoon $\boldsymbol{A}$ kiinteä $n \times n$ -matriisi ja $\boldsymbol{y}$ $n \times 1$ -vektori. Perustele huolellisesti derivointisääntö

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}'} = \boldsymbol{A}.$$

   b) Johda monisteen sivulla 8 viitattu tulos (monisteen merkinnöillä)

$$\frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

   (Vihje: Sovella a)-kohdan derivointisääntöä.)