Lineaariset mallit, kevät 2010

Harjoitus 1, viikko 12

1. Olkoon $\boldsymbol{x}_1 = [1,2,1]'$, $\boldsymbol{x}_2 = [-1,3,2]'$, $\boldsymbol{x}_3 = [-13,-1,2]'$ ja $\boldsymbol{x}_4 = [1,1,0]'$. Näytä, että

   (a) vektorit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_3$ ovat lineaarisesti riippuvia ja anna niiden välinen lineaarinen suhde.

   (b) vektorit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_4$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja etsi niiden lineaarinen kombinaatio, joka antaa vektorin $[a,b,c]'$.

2. Neliömatriisin jälki on sen diagonaalialkioiden summa eli, jos $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ on $n \times n$ matriisi, niin sen jälki on $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Osoita, että

   (a) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

   (b) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

   (c) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$:n ominaisarvojen summa, kun $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen.

   (Vihje: Viimeisessä kohdassa voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa)

3. Olkoon neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ $(n \times n)$ idempotentti eli $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}$ (merkitään $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}^2$). Osoita, että $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ on myös idempotentti ja että $\boldsymbol{A}$:n ominaisarvot ovat nollia ja ykkösiä. (Vihje: Ominaisvektorit määrittävä yhtälö)

4. Tarkastellaan aineistosta $y_1, \ldots, y_n$ laskettua otoskeskiarvoa $\bar{y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ja otosvarianssia $s^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$. Osoita, että

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{J})\boldsymbol{y},$$

   jossa $\boldsymbol{y} = [y_1 \cdots y_n]'$ ja $\boldsymbol{J} = \mathbf{1}_n(\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n'$ ($\mathbf{1}_n = [1 \cdots 1]'$, $n \times 1$). Osoita lisäksi, että $\boldsymbol{J}$ (ja siten $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{J}$) on symmetrinen ja idempotentti.

5. Symmetristä matriisia $\boldsymbol{A}$ $(n \times n)$ sanotaan positiivisesti definiitiksi (merkitään $\boldsymbol{A} > 0$), jos $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{Ax} > 0$ kaikilla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Osoita, että positiivisesti definiitillä matriisilla $\boldsymbol{A}$ $(n \times n)$ kaikki ominaisarvot ovat positiivisia. Osoita edelleen, että positiivisesti definiitti matriisi on epäsingulaarinen (eli sillä on käänteismatriisi). (Vihje: Voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa)