12. Kertolaskukaava jälleen kerran

Edellä sovellettiin kertolaskukaavaa ehdollisille yhteis-ptnf:oille. Sen mukaan ehdollinen yhteis-ptnf voidaan jakaa tekijöihin samalla periaatteella kuin ei-ehdollinen yhteis-ptnf, ts.

$$P(X=x, Y=y \mid K=k) = P(X=x \mid K=k)\, P(Y=y \mid X=x, K=k)$$

aina, kun x, y ja k ovat diskreettien satunnaismuuttujien tai -vektorien mahdollisia arvoja ja kun kyseiset ehdolliset tn:t ovat hyvin määriteltyjä. Tämän tuloksen voi perustella tarkistamalla identiteetin

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid A \cap C)$$

(kun kyseiset ehdolliset tn:t ovat hyvin määriteltyjä). Tämän jälkeen samastetaan

$$A = \{X=x\}, \quad B=\{Y=y\}, \quad C=\{K=k\}$$

ja huomataan kaavojen yhtäpitävyys. Tätä varten pitää tietenkin huomata, että pilkun tapahtumien välillä tn-merkinnässä $P(\cdot \mid \cdot)$ tarkoittaa sitä, että kaikki pilkulla erotetut tapahtumat sattuvat, eli pilkku $\equiv$ tapahtumien leikkaus.

Kertolaskusääntö saadaan helposti yleistettyä myös useammalle kuin kahdelle tapahtumalle; nimittäin pätee

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

(mikäli kaikki ehdolliset tn:t ovat hyvin määriteltyjä). Tästä saadaan kertolaskukaava yhteis-ptnf:oille. Analoginen tulos pätee myös ehdollisille tn:ille sekä ehdollisille yhteis-ptnf:oille.

Esimerkki: <u>pallot kulhossa, ilman takaisinpanoa.</u> Kulhossa on aluksi N palloa, joista K (parametri) on valkoista. Poimimme palloja kulhosta palauttamatta nostettuja palloja kulhoon. Miten lasketaan otantajakauma

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid K = k),$$

kun $n < N$?

Vastaus: käytetään kertolaskukaavaa:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid K = k) &= P(X_1 = x_1 \mid K = k) \\ &\times P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1, K = k) \\ &\times \dots \\ &\times P(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, K = k) \end{aligned}$$

Kukin termeistä on helppo järkeillä pitämällä kirjaa siitä, kuinka monta palloa kulhossa on jäljellä ja kuinka monta niistä on valkoista silloin, kun kyseinen ehto on voimassa.

Esim.
$$P(X_1 = x_1 \mid K = k) = \begin{cases} \frac{k}{N}, & \text{kun } x_1 = 1 \\ 1 - \frac{k}{N}, & \text{kun } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0, K = k) = \begin{cases} \frac{k}{N-1}, & \text{kun } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{kun } k = N \end{cases}$$

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1, K = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{N-1}, & \text{kun } 1 \le k \le N \\ 0, & \text{kun } k = 0 \end{cases}$$

Komplementtitapahtuman $X_2 = 0$ ehdollinen tn löytyy tietenkin kaavalla

$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = x_1, K = k) = 1 - P(X_2 = 1 \mid X_1 = x_1, K = k).$$

Tätä menettelyä on helppo jatkaa eteenpäin. (HT)

Huomautus: edellä tapahtumat $\{X_1=0, K=N\}$ sekä $\{X_1=1, K=0\}$ ovat mahdottomia (niiden tn on nolla). Käytin konventiota

$$P(B \mid A) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}, & \text{kun } P(A) > 0 \\ 0, & \text{kun } P(A) = 0 \end{cases}$$

Tällöin kertolaskusääntö pysyy voimassa:

1) jos $P(A) > 0$, niin
$$P(A)\, P(B \mid A) = P(A) \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B)$$

2) jos $P(A) = 0$, niin
$$P(A)\, P(B \mid A) = 0 \cdot 0 = 0,$$
mutta toisaalta $A \cap B \subset A$, joten
$$0 \le P(A \cap B) \le P(A) = 0,$$
joten kertolaskusääntö on voimassa.

Tämä päättely yleistyy ehdolliselle tn:lle sekä n:n joukon leikkaukselle, joten otantajakauma (tai uskottavuusfunktio) voidaan tässäkin tapauksessa laskea kertolaskusäännöllä.

Posteriorijakauma saadaan Bayesin kaavalle
$$P(K=k \mid \underline{X} = \underline{x}) = \frac{1}{P(\underline{X}=\underline{x})} P(K=k)\, P(\underline{X}=\underline{x} \mid K=k),$$
eikä sen kohdalla jouduta samanlaisiin vaikeuksiin, sillä järkevissä bayesläisissä malleissa $P(\underline{X}=\underline{x}) > 0$; $P(K=k \mid \underline{X}=\underline{x})$ häviää niillä k, joilla havaittu $\underline{x}$ on mahdoton.

[$P(\underline{X}=\underline{x})$ olisi nolla, jos $P(K=k, \underline{X}=\underline{x})$ olisi identtisesti nolla havaitulle $\underline{x}$. Tällainen havainto $\underline{x}$ olisi mallin mukaan mahdoton, joten malli ei voisi olla järkevä todellisuuden kuvaus.]

13. Ehdolliset jakaumat yleisemmässä tapauksessa

Tähän asti ehdolliset jakaumat on käsitelty suoraan ehdollisen tn:n määritelmän avulla. Nyt siirrymme käsittelemään tilannetta, jossa mukana on jatkuvasti jakautuneita muuttujia.

Hyvä uutinen: kaavat näyttävät samalta kuin ennen, kun summan tilalle kirjoitetaan tarvittaessa integraali.

Huono uutinen: niitä integraaleja harvoin osataan laskea analyyttisesti.

Hyvä uutinen: joissakin tapauksissa integraalit osataan laskea nopean silmäilyn jälkeen (liittojakaumat).

Kun havainto ja parametri ovat diskreettejä satunnaismuuttujia, niin bayesläinen päättely palautuu kertolaskukaavaan,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y \mid X=x)$$
$$= f_Y(y)\, f_X(x \mid Y=y),$$

jossa ptnf:oita merkitään

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) \qquad f_X(x) = P(X=x)$$
$$f_Y(y \mid X=x) = P(Y=y \mid X=x) \quad \text{jne.}$$

Sopivasti tulkittuna tämä kaava säilyy voimassa kaikissa jatkossa eteen tulevissa tilanteissa.

Epäoleellisten vaikeuksien välttämiseksi teemme positiivisuusoletuksen: tarkastelemme sellaisia yhteisjakaumia, joille

$$f_{X,Y}(x,y) > 0 \iff (f_X(x) > 0 \text{ ja } f_Y(y) > 0)$$

ja vain sellaisia (x,y), joille $f_{X,Y}(x,y) > 0$.

Tapaus: X diskreetti, Y jatkuva

$f_X(x) = P(X = x)$ on X:n reuna-ptnf.

$f_Y(y \mid X = x)$ on Y:n tf (tiheysfunktio) ehdolla $X = x$:

$$P(a \le Y \le b \mid X = x) = \int_a^b f_Y(y \mid X = x)\, dy$$

kaikilla $a \le b$

$f_Y(y)$ on Y:n reuna-tf:

$$P(a \le Y \le b) = \int_a^b f_Y(y)\, dy$$

$f_X(x \mid Y = y)$ on X:n ptnf ehdolla $Y = y$.

Näiden välillä on yhteyksiä:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y \mid X = x)$$
$$= f_Y(y)\, f_X(x \mid Y = y) \quad \text{kaikilla } x, y$$

Yhteisjakauman esityksestä $f_{X,Y}(x,y)$ saadaan todennäköisyyksiä summaamalla x:n suhteen ja integroimalla y:n suhteen:

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x \in A} \int_B f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

kaikilla (järkevillä) joukoilla $A, B \subset \mathbb{R}$

Marginalisointi:

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\, dx \qquad \left[\text{Määrätty integraali jonkun } S_Y = \{y : f_Y(y) > 0\} \text{ yli.}\right]$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

Seuraus: jos jompikumpi yhteisjakauman faktoroinneista tunnetaan, niin niistä toinen pystytään (periaatteessa) laskemaan:

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{f_Y(y)\, f_X(x \mid Y = y)}{f_X(x)}$$

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_X(x)\, f_Y(y \mid X = x)}{f_Y(y)}$$

Tapaus: (X,Y):llä jatkuva yhteisjakauma

$f_X(x)$ on X:n reuna-tf
$f_Y(y \mid X=x)$ on Y:n tf ehdolla $X=x$
$f_Y(y)$ on Y:n reuna-tf
$f_X(x \mid Y=y)$ on X:n tf
$f_{X,Y}(x,y)$ on parin (X,Y) yhteis-tf.

Näiden välillä on yhteyksiä:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y \mid X=x)$$
$$= f_Y(y)\, f_X(x \mid Y=y) \quad \text{kaikilla } x,y.$$

yhteis-tf:stä saadaan todennäköisyyksiä integroimalla kummankin muuttujan suhteen:

$$P(X \in A, Y \in B) = \iint_{A \times B} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \int_A \left(\int_B f_{X,Y}(x,y)\, dy \right) dx$$
$$= \int_B \left(\int_A f_{X,Y}(x,y)\, dx \right) dy$$

(tasointegraali voidaan palauttaa iteroiduksi integraaliksi).

Marginalisointi:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Seuraus: jos jompikumpi yhteis-tf:n faktoroinneista tunnetaan, niin se toinen pystytään (periaatteessa) laskemaan.

Huomautus: jos Y:llä on jatkuva jakauma, niin arvoa $f_X(x \mid Y=y)$ ei voida suoraan ajatella ehdollisena todennäköisyytenä, mutta se voidaan tulkita raja-arvojen kautta.

Jos X diskreetti, Y jatkuva, niin

$$P(X=x \mid y \le Y \le y+h) \xrightarrow[h \to 0+]{} f_X(x \mid Y=y)$$

(ainakin joillakin jatkuvuusoletuksilla).

Jos (X,Y):llä on jatkuva yhteisjakauma, niin kaikilla $a \le b$ pätee

$$P(a \le X \le b \mid y \le Y \le y+h) \xrightarrow[h \to 0+]{} \int_a^b f_X(x \mid Y=y)\,dx$$

(ainakin joillakin jatkuvuusoletuksilla).

Tilastotieteessä havainnot tehdään vain jollakin tarkkuudella, ja tällöin käytännössä approksimoidaan tämän tapaisia suureita vastaavien ehdollisten jakaumien avulla.

Yhteenveto: jokaisessa tapauksessa (kertolaskukaava)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y \mid X=x) = f_Y(y)\, f_X(x \mid Y=y)$$

Marginalisointi:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y f_{X,Y}(x,y), & Y \text{ diskreetti} \\ \int f_{X,Y}(x,y)\,dy, & Y \text{ jatkuva} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_x f_{X,Y}(x,y), & X \text{ diskreetti} \\ \int f_{X,Y}(x,y)\,dx, & X \text{ jatkuva} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f_X(x) \\ f_X(x \mid Y=y) \end{matrix}\right\} \text{on} \begin{cases} \text{ptnf}, & \text{jos } X \text{ diskreetti} \\ \text{tf}, & \text{jos } X \text{ jatkuva} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f_Y(y) \\ f_Y(y \mid X=x) \end{matrix}\right\} \text{on} \begin{cases} \text{ptnf}, & \text{jos } Y \text{ diskreetti} \\ \text{tf}, & \text{jos } Y \text{ jatkuva} \end{cases}$$

Huomautus 1) ptnf on ei-negatiivinen ja sen summa koko avaruuden yli on yksi.
2) ~~tf~~ tf on ei-negatiivinen ja sen integraali koko avaruuden yli on yksi.

Jos Y:llä on jatkuva jakauma, niin

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{1}{f_X(x)} f_Y(y)\, f_X(x \mid Y = y)$$

[y:n funktiona]

$$\propto f_Y(y)\, f_X(x \mid Y = y)$$

Tässä tarvittavan normalisointivakion $f_X(x)$ saa laskettua laskemalla integraalin

$$f_X(x) = \int f_Y(y)\, f_X(x \mid Y = y)\, dy$$

(Tämä voi olla käytännössä hankalaa.)

Kirjallisuudesta löytyy monenlaisia merkintöjä yhteis- reuna- ja ehdollisille jakaumille. Usein käytetään merkintöjä

$$f_X(x),\ f_Y(y),\ f_{X|Y}(x|y),\ f_{Y|X}(y|x),\ f_{X,Y}(x,y)$$

Bayesläisen päättelyn yhteydessä on tavanomaista jättää alaindeksit kirjoittamatta. Tällöin merkinnät voisivat olla $f(x), f(y), f(x|y), f(y|x), f(x,y)$. Aloittelijan on näitä merkintöjä vaikea ymmärtää, sillä esim. $f(x|y)$ voi, asiayhteydestä riippuen, tarkoittaa joko

- funktiota $(x,y) \mapsto f_X(x \mid Y = y)$
- funktiota $x \mapsto f_X(x \mid Y = y)$ jollakin kiinteällä y
- funktiota $y \mapsto f_X(x \mid Y = y)$ jollakin kiinteällä x
- arvoa $f_X(x \mid Y = y)$ kiinteillä (x, y).

Tästä huolimatta tällainen genereeninen notaatio ei (taitavasti käytettynä) yleensä johda sekaannukseen.

14. Nasta lasipurkissa: jatkuva parametri

[AS: jakso 1.6]

Nastaa helistetään lasipurkissa ja sen jälkeen rekisteröidään, laskeutuuko se selälleen vai kyljelleen. Koetta toistetaan yhteensä n kertaa.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos nasta tulee selälleen } i\text{:nnellä toistolla} \\ 0, & \text{— " — kyljelleen — " —} \end{cases}$$

Valitaan parametriksi välillä $(0,1)$ oleva reaaliluku θ, joka on tn sille, että nasta päätyy selälleen. Voisimme periaatteessa selvittää θ:n arvon mielivaltaisen tarkasti tekemällä erittäin pitkän koesarjan (mutta jossain vaiheessa jokin menisi rikki: nasta, lasipurkki tai helistäjän käsi).

Emme tunne θ:n arvoa (tällä kertaa <u>kukaan</u> ei oikeasti tunne sitä), joten pidämme sitä satunnaismuuttujana. Huomautus: kreikkalaisten kirjaimien ja parametrien kohdalla käytetään usein samaa symbolia (esim. θ) sekä satunnaismuuttujalle että sen (potentiaaliselle) arvolle. Tehdään [toisin kuin AS, ks. s. 20] kuitenkin selvyyden vuoksi merkintäsopimus:

$\tilde{\theta}$ on parametri ymmärrettynä satunnaismuuttujana

θ on $\tilde{\theta}$:n (potentiaalinen) arvo.

Ennakkokäsityksemme parametrin arvosta kuvaa jokin välillä (0,1) määritelty jatkuva jakauma, jonka tiheysfunktio on

$$f_{\tilde{\theta}}(\theta) =: p(\theta), \qquad 0 < \theta < 1$$

Jos parametrin arvo θ tunnetaan, niin aivan ilmeisesti havaintovektorin otantajakauma on

$$P(\underline{X} = \underline{x} \mid \tilde{\theta} = \theta) = P(\underline{X} = \underline{x} \mid \theta) \quad [\text{merkintä}]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{T(\underline{x})} (1-\theta)^{n-T(\underline{x})},$$

jossa (taas)

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Posteriorijakauma on jatkuva jakauma, jonka tf

$$p(\theta \mid \underline{X} = \underline{x}) := f_{\tilde{\theta}}(\theta \mid \underline{X} = \underline{x})$$

$$= \frac{1}{f_{\underline{X}}(\underline{x})} p(\theta)\, P(\underline{X} = \underline{x} \mid \theta)$$

$$\propto p(\theta)\, P(\underline{X} = \underline{x} \mid \theta) \qquad \left[\begin{array}{l}\theta\text{:n funktiona,} \\ 0<\theta<1\end{array}\right]$$

Tässä verrannollisuustuloksessa tarvittava normalisointivakio $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ saadaan laskettua integraalina

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_0^1 p(\theta)\, p(\underline{X} = \underline{x} \mid \theta)\, d\theta$$

(mutta tämä voi olla käytännössä vaikea laskea.)

15. Liittojakauma

Joillekin uskottavuusfunktioille on mahdollista löytää parametrinen perhe jakaumia siten, että mikäli priorijakauma valitaan kyseisestä perheestä, niin myös posteriorijakauma kuuluu kyseiseen perheeseen. Nasta lasipurkissa -esimerkeissä päädyttiin ns. binomiuskottavuuteen (binomikokeen uskottavuusfunktioon), ja tälle uskottavuusfunktiolle beta-jakaumat muodostavat tällaisen mukavan jakaumaperheen. Tällöin sanotaan, että beta-jakauma on binomiuskottavuuden <u>liittopriori</u> (conjugate prior) tai että otantajakauma ja priorijakauma ovat toisilleen <u>liittojakaumia</u>.

Beta-jakauma on jatkuva jakauma, jonka tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) \propto x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0<x<1,$$

missä $\alpha>0$ ja $\beta>0$ ovat jakaumaperheen parametrit. Merkitsemättä jätetty normalisointivakio on

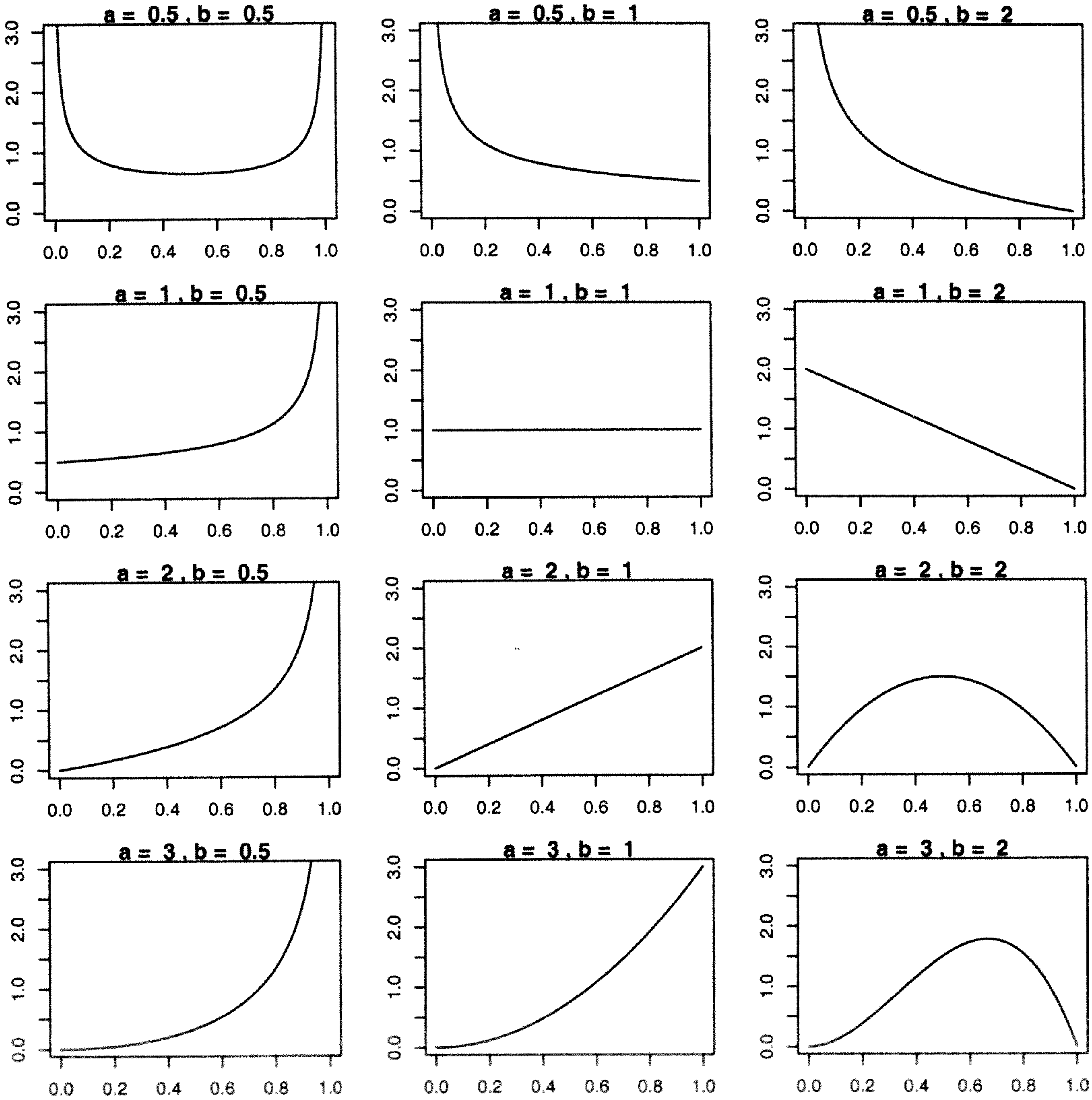
$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Tämä on ns. (Eulerin) beta-funktio (ja "B" on iso beta-kirjain). Ts. tiheysfunktion täydellinen kaava on (mielivaltaisilla $\alpha,\beta>0$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Useimmiten riittää tietää tiheysfunktion muoto, $f(x) \propto x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0<x<1$; toisinaan tarvitaan normalisointivakion lauseketta.

Beta-jakauman tiheysfunktioita eri parametriarvoilla. Tapaus $\alpha=\beta=1$ on välin $(0,1)$ tasajakauma $Tas(0,1)$. Tiheysfunktiolla on moodi pisteessä $\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$, mikäli $\alpha,\beta>1$. Jakauman odotusarvo on $\alpha/(\alpha+\beta)$ kaikille $\alpha,\beta>0$.



Beta-funktion arvot voidaan laskea, jos osataan laskea (Eulerin) gammafunktion $\Gamma(\cdot)$ arvoja sillä voidaan osoittaa, että

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad \alpha,\beta>0$$

jossa Γ-funktio voidaan määritellä kaavalla

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{kun } t>0$$

Voidaan osoittaa, että $\Gamma(1)=1$ ja että

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t) \quad \text{kaikilla } t>0,$$

mistä helposti päätellään, että $\Gamma(n)=(n-1)!$, kun $n\geq 1$ on kokonaisluku.

(Näitä kaavoja ei tarvitse opetella tenttiä varten ulkoa, vaan ne annetaan tehtäväpapereissa, mikäli niitä tarvitaan).

Tarkistetaan, että beta-jakauma on binomiuskottavuuden liittojakauma. Priorin parametrit ovat $\alpha,\beta>0$.

Tapa 1) Lasketaan normalisointivakio $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X}=\underline{x})$.

$$P(\underline{X}=\underline{x}) = \int_0^1 p(\theta)\, P(\underline{X}=\underline{x}\mid\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\, \theta^{T(\underline{x})}(1-\theta)^{n-T(\underline{x})}\, d\theta$$

[Kirjoitettiin beta-tiheys käyttämällä muuttujana θ:a, sekä binomikokeen uskottavuus]

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \theta^{\alpha+T(\underline{x})-1}(1-\theta)^{\beta+n-T(\underline{x})-1}\, d\theta$$

$$= \frac{B(\alpha+T(\underline{x}),\ \beta+n-T(\underline{x}))}{B(\alpha,\beta)},$$

joten

$$p(\theta\mid\underline{X}=\underline{x}) = \frac{p(\theta)\, P(\underline{X}=\underline{x}\mid\theta)}{P(\underline{X}=\underline{x})}$$

$= \dots =$ betajakauman tiheys, jonka parametrit ovat $\alpha+T(\underline{x})$ ja $\beta+n-T(\underline{x})$

Tavassa 1) sattuu laskuvirheitä helposti. Tulos on paljon helpompaa johtaa seuraavalla tavalla:

Tapa 2) θ:n funktiona

posteriori $\propto$ priori × uskottavuus,

joten

$$p(\theta \mid \underline{X} = \underline{x}) \overset{[\theta]}{\propto} p(\theta)\, P(\underline{X} = \underline{x} \mid \theta)$$

$$\propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\, \theta^{T(\underline{x})}\, (1-\theta)^{n-T(\underline{x})}$$

[Kirjoitettiin $p(\theta)$ (θ:n funktiona!) sekä uskottavuusfunktio, mutta jätettiin kirjoittamatta vakiot, jotka eivät riipu θ:n arvosta]

$$\propto \theta^{\alpha+T(\underline{x})-1}\,(1-\theta)^{\beta+n-T(\underline{x})-1}, \quad 0<\theta<1$$

Nyt huomataan, että (ainoa!) jatkuva jakauma, jonka tf on (normalisointivakiota vaille) tämän näköinen on beta-jakauma, jonka parametrit ovat $\alpha + T(\underline{x})$ ja $\beta + n - T(\underline{x})$.

Tässä $T(\underline{x})$ on "onnistumisten" $X_i = 1$ lkm, ja $n - T(\underline{x})$ on "epäonnistumisten" $X_i = 0$ lkm missä toistossa, jotka ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla θ [tai pedanttisemmin ilmaistuna: ehdolla $\tilde{\theta} = \theta$].