

Johdatus tilastolliseen päättelyyn Harjoitus 4 (19. 4.–23. 4. 2010)

1. Oletetaan, että vastasyntyneen poikalapsen päänympäryys noudattaa likimain normaali-jakaumaa. Eräessä väestössä on otantatutkimuksen perusteella johdettu keskimääräiselle päänympäryykselle μ (senttimetriä) 95 %:n luottamusväli (34.3, 34.9). Mitkä seuraavista tulkinnoista ovat oikein ja mitkä väärin?

- a) μ :n todennäköisyysjakaumasta 95 % sijaitsee kyseisellä välillä.
- b) 95 %:lla kaikista vastasyntyneistä poikalapsista päänympäryys on kyseisellä välillä.
- c) Mikäli samanlainen otantatutkimus toistettaisiin useita kertoja ja joka kerralla muodostettaisiin vastaava luottamusväli, kuuluisi μ :n arvo noin 95 %:iin saaduista väleistä.

Perustele erityisesti väärin väitteiden kohdalla, miksi ne ovat väärin.

2. Erään köyden keskimääräinen murtolujuus on ollut 1800 kg. Tehdas muuttaa valmistusmenetelmää ja uskoo murtolujuuden kasvaneen tämän myötä. Tutkittiin 20 uudella menetelmällä valmistettua köyttä ja saatiin niiden keskimääräiseksi murtolujuudeksi 1830 kg, keskihajonnan ollessa 80 kg. Oletamme, että murtolujuuden vaihtelut ovat normaalisia. Voidaanko havaintojen perusteella päätellä murtolujuuden todella kasvaneen? Testaa asiaa t -testillä ja merkitsevyystasolla 0.05.

3. (Edellisten harjoitusten 5. tehtävä.) Henkilö on saanut puutavaraliikkeeltä tuumanpaksuista tuppeensahattua koivulautaa. Liike lupaa, että laudan paksuuden toleranssit ovat ± 0.05 tuumaa, minkä tulkitsemme tarkoittavan sitä, että paksuuden keskihajonta σ on korkeintaan 0.05 tuumaa. Henkilö tekee saamastaan lautaerästä 10 paksuusmittausta, saaden tulokset 0.89, 0.92, 0.96, 0.96, 0.99, 1.02, 1.03, 1.06, 1.08 ja 1.09 tuumaa. Laske näiden mittausten keskihajonta s ja testaa χ^2 -testillä sekä merkitsevyystasolla 0.05 liikkeen esittämän väitteen paikkansapitävyyttä. Voimme olettaa, että paksuuden vaihtelut noudattavat kyllin tarkasti normaalijakaumaa.

Huom. Tehtävissä 2 ja 3 tarvittavat taulukot löytyvät 3. harjoitustehtävien kääntöpuolelta ja kurssin kotisivulla olevasta linkistä.

Tehtävät 4 ja 5 ovat paperin kääntöpuolella! Niissä käsitellään bayesläistä päättelyä.

4. Leijona viettää yönsä jossakin kolmesta tilasta: se on joko **unelias** ($\theta = 1$), **kohtalaisen aktiivinen** ($\theta = 2$) tai **hyvin aktiivinen** ($\theta = 3$). Leijona syö yön aikana X ihmistä, ja X :n ehdollinen pistetodennäköisyysfunktio on seuraava:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x \mid \theta = 1)$.90	.08	.02	.00	.00
$P(X = x \mid \theta = 2)$.05	.05	.80	.10	.00
$P(X = x \mid \theta = 3)$.00	.05	.05	.80	.10

Aamulla havaitsemme kauhuksemme, että leijona on syönyt yhden ihmisen. Laske posteriorijakauma leijonan tilalle (ts. laske todennäköisyydet $P(\theta = j \mid X = 1)$, $j = 1, 2, 3$) seuraavassa kahdessa tapauksessa.

- a) Ennakkokäsityksemme mukaan kaikki kolme tilaa ovat yhtä todennäköisiä.
- b) Tiedämme, että leijona söi edellisenä päivänä tukevan aterian, minkä perusteella priorikäsityksemme leijonan yöllisestä tilasta on $P(\theta = 1) = 0.7$, $P(\theta = 2) = 0.2$ ja $P(\theta = 3) = 0.1$.
5. Kulhossa on 4 palloa, joista K on valkoista ja loput mustia. Et tiedä K :n arvoa, mutta ennakkokäsityksesi mukaan kaikki viisi vaihtoehtoa $K = k$ (jossa $k = 0, 1, 2, 3$ tai 4) ovat yhtä todennäköisiä. Nostat silmät sidottuna kulhosta yhden pallon kerrallaan siten, että ennen kutakin nostoa kaikki neljä palloa palautetaan kulhoon ja kulhoa ravistetaan perusteellisesti. Kunkin noston jälkeen saat tietää nostamasi pallon värin. Kolmessa ensimmäisessä nostossa saat tulokseksi värit valkoinen, musta ja valkoinen.

Laske K :n posteriorijakauma. Laske lisäksi ennustetodennäköisyys sille, että seuraava nostettava pallo on valkoinen.