INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Handledning 8
För veckan som börjar 29.3.2010

Genom att delta i handledningen får man fr.o.m. 22.3. extrapoäng:

Genom att delta i 4-5 handledningar får man 2 extrapoäng och genom att delta i 3 handledningar får man 1 extrapoäng.

1. Vi undersöker funktionen $f_n(x) = x^n$ i intervallet $]0, 1[$.

   (a) Hur kan vi motivera att för alla $x \in]0, 1[$ gäller $f_n(x) \to 0$ när $n \to \infty$? (Tips: Bernoullis olikhet)

   (b) Från förra punkten vet vi att för alla $x \in]0, 1[$ existerar ett sådant K_x att för alla $n > K_x$ gäller $f_n(x) < 10^{-100}$. Hur är K_x beroende av x? (Du kan t.ex. undersöka hur

   $$-100 \frac{\ln 10}{\ln x}$$

   beter sig när $x \in]0, 1[$.)

2. Vi definierar funktionerna $f_n \colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ med $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{x^n})$ när $n = 1, 2, \ldots$ Skissera bilden. Konvergerar följden $f_1, f_2, \ldots$ punktvis? Konvergerar den likformigt?

3. Beräkna

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{5}{x^3 + n^4}}\, dx.$$

   Använd likformig konvergens (kontrollera!)

4. Vi definierar funktionerna $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ med villkoren $f_n(x) = 0$ när $x \le \frac{1}{n+2}$ och när $x \ge \frac{1}{n}$. I intervallen $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$ och $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ är funktionens graf en (i det första intervallet växande och i det andra avtagande) rät linje. Till slut vet vi att $f_n(\frac{1}{n+1}) = n$. Rita en bild!

   Konvergerar följden punktvis mot någon funktion f? Är alla f_n och f kontinuerliga? Är konvergensen likformig?