INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 8
Vi går igenom övningen efter påsklovet fredagen den 8 april.

1. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon\ ]1,2[\to \mathbb{R}$ som definieras med villkoren $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{x}$. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt?

2. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras med villkoren $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{x}$. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt?

3. Vi betraktar funktionerna $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ som definieras med villkoren $f_n(x) = n - n^2 x$ när $0 \le x \le \frac{1}{n}$ och $f_n(x) = 0$ annars. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt? Existerar gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

4. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{n}\cos(e^{ex}))\,dx.$$

Använd likformig konvergerns (kontrollera att vi verkligen har likformig konvergens!)

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + \frac{1}{n})^{nx}\,dx.$$

Använd likformig konvergerns (kontrollera att vi verkligen har likformig konvergens!) Kom också ihåg definitionen av talet e. När du bevisar likformig konvergens kan du tillämpa medelvärdessatsen på funktionen $f(t) = t^x = e^{x\ln t}$ (fixerat x.)

6. Vi antar att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och definierar funktionerna $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoren

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) + f(x-\frac{1}{n})}{2}.$$

(a) Anta att f är kontinuerlig. Visa att följden (f_n) konvergerar punktvis.
(b) Vi antar att f är likformigt kontinuerlig. Visa att följden (f_n) konvergerar likformigt.