

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys II

Övning 4

För veckan som börjar 15 . 2. 2010

1. Beräkna

$$\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1} \right) dx.$$

2. Beräkna

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2 - 2x + 1} dx$$

Tips: kvadratkomplettera under roten, modifiera integranden till formen $\sqrt{1 - p(x)^2}$ och substitutera sedan $p(x) = \sin t$.

3. Bestäm längden av grafen av funktionen $f(x) = x^2$ mellan punkterna $x = 0$ och $x = 1$ med hjälp av Korollarium 9.11 på sida 44.

Tips: i integralen kan du lösa det sig att substituera $x = \frac{1}{2} \sinh t$.

4. Varför måste

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} dx$$

tolkas som en oegentlig integral? Konvergerar eller divergerar den?

5. Vi antar att funktionen $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ är strängt växande och deriverbar samt att dess derivata är kontinuerlig i $[1, 3]$. Vi antar dessutom att $f(1) = 2$ och $f(3) = 5$ och att $\int_1^3 f(t) dt = 8$. Beräkna inversfunktionens integral

$$\int_2^5 f^{-1}(x) dx.$$

Tips: Substitueraa $x = f(t)$ i inversfunktionens integral. Utrycket $tf'(t)$ som sedan kommer emot lösa det integrera partiellt. Rita bild!

6. Vi antar att andra derivatan f'' för funktionen f är kontinuerlig i $] - 1, 1[$. Vi antar att $x \in]0, 1[$. (a) Kontrollera först att ekvationen

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

gäller när $x \in]0, 1[$. (b) Tillämpa sedan partiell integrering genom att tänka att $f'(t) = 1f'(t)$ och att 1 är derivatan av uttrycket $-(x-t)$ med avseende på t . Resultatet borde vara av typen $f(x) = f(0) + xf'(0) +$ en integral. (Obs: resultatet gäller även när $x \in] - 1, 0[$.