

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys II

Övning 10

För veckan som börjar 19. 4. 2010

1. Visa att vi för varje x har

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(Det lönar sig att ta en titt på sida 92.)

2. Vi betecknar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k.$$

Vad är seriens konvergensintervall? För vilka tal $a > 0$ konvergerar serien likformigt i intervallet $[-a, a]$? Beräkna $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ och $f'''(0)$.

3. Framställ funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ som en potensserie som konvergerar i intervallet $] -1, 1[$ och bestäm funktionens 10:e, 11:e och 12:e derivata i punkten $x = 0$. Tips: geometrisk serie.

4. Vi antar att vi för alla k har att $|a_k| \leq |b_k|$. Försök formulera och bevisa ett samband mellan konvergensradierna för serierna $\sum a_k x^k$ ja $\sum b_k x^k$.

5. Vi betecknar

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

och

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Visa att dessa serier definierar funktioner $s(x)$ och $c(x)$ som är definierade på hela tallinjen, samt att vi för varje x har att $s'(x) = c(x)$ och $c'(x) = s(x)$. (Det lönar sig att ta en titt på sidorna 122 och 123.)

6. (Fortsättning från föregående.) Visa (a) att vi för varje x och y har

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \text{ och } c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

och (b) att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1.$$