Algebrallinen lukuteoria: VII Neliömuotojen luokkaluvut

1. Osoita, että jokaiselle redusoidulle epädefiniitille neliömuodolle on olemassa yksikäsitteinen oikea ja vasen vierekkäinen neliömuoto.

2. Etsi luokkaluvut h_D ja redusoidut esittäjät, niille neliömuodoille, joiden diskriminantti on $-24 \leq D \leq -4$.

3. Osoita, että jos $D = 1-4q$, missä $q > 1$ ja $h_D = 1$, silloin q on alkuluku.

4. Osoita, että jos $D = -4q$, missä $q > 1$, ja $h_D = 1$, silloin q on alkuluvun potenssi.

5. Osoita, että $f = x^2 + xy + 5y^2$ on ainoa redusoitu positiividefiniitti binäärinen neliömuoto, jonka diskriminantti on -19. Tämän perusteella määrittele luokkaluku h_{-19}. Mitä parittomia alkulukuja f esittää? Osoita, että on mahdollista ratkaista $x^2 \equiv -19 \mod 4$, mutta ei $x^2 \equiv -10 \mod 2^a$, kun $a \geq 3$. Mitä kokonaislukuja f esittää kunnolla? Mitä kokonaislukuja f yleisesti esittää?

6. Etsi, mitkä alkuluvut p voidaan kirjoittaa muotoon $p = x^2+5xy+11y^2$. Kuinka monta kokonaislukuratkaisua tälle yhtälölle on yhteensä?

7. Olkoon K lukukunta. Määritellään Dedekindin zeeta-funktio

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \lhd O_K} N(I)^{-s},$$

jossa summataan kaikkien nollasta eroavien O_K:n ideaalien I yli. Osoita, että on olemassa formaali identiteetti

$$\zeta_K(s) = \prod_P \frac{1}{1 - N(P)^{-s}},$$

missä oikeanpuoleinen tulo on kaikkien O_K:n nollasta eroavien pääideaalien yli. (On mahdollista osoittaa, että kumpikin puoli suppenee, kun $\Re(s) > 1$, ja määrittelee holomorfisen funktion tällä alueella.) Laske $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$. Olkoon $K = \mathbb{Q}[i]$. Osoita, että

$$\zeta_K(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) L(\chi, s),$$

missä $L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$, oikean puoleinen tulo kaikkien parittomien alkulukujen yli, ja $\chi(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Osoita, että

$$L(\chi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} \pm \dots .$$