Algebrallinen lukuteoria: IV Neliökuntien luokkaluvut ja niiden sovelluksia

1. Olkoon $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, mikä tahansa kanta $\mathbb{R}^n$:lle. Tämä kanta virittää hilan $L = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{Z}\}$. Hilan perualue on $D = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : a_i \in [0,1)\}$, perusalueen tilavuus on $Vol(D) := |\det(a_{ij})|$. Todista, että $Vol(D)$ ei riipu $\mathbb{Z}$-kannan valinnasta hilalle L.

2. Todista Blichfeldtin lemma: Olkoon L hila $\mathbb{R}^n$:ssä, ja olkoon S rajoitettu ja mitallinen $\mathbb{R}^n$:n osajoukko, jolle pätee $Vol(S) > Vol(L)$. Silloin on olemassa $x, y \in S$, missä $x \neq y$ ja $x - y \in L$.

3. Laske luokkaluku h_K kunnalle $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$.

4. Todista, että kunnan $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ luokkaluku on 5. Osoita, että jos $x, y \in \mathbb{Z}$, toteuttavat yhtälön $y^3 = 4x^2 + 47$, silloin $x = \pm 250$.

5. Etsi kaikki kokonaisluvut $X, Y \in \mathbb{Z}$, jotka toteuttavat yhtälön $Y^2 = X^3 - 5$

6. Tiedetään, että ainoat kompleksiset neliökunnat, joille $h_K = 1$ ovat $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, missä

$$D \in \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}.$$

Tätä tietoa käyttäen osoita, että

a) $n^2 + n + 17$ on alkuluku kaikille $0 \leq n \leq 15$ (ajattele $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$).

b) $n^2 + n + 11$ on alkuluku kaikille $0 \leq n \leq 9$ (ajattele $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$).