Algebrallinen lukuteoria: IV Ideaalit, ideaaliluokat

1. Olkoon β polynomin $\mathbb{Z}$:n yli jaottoman polynomin $X^3 + pX + q$ juuri. Osoita, että alkioitten $1, \beta, \beta^2, \beta^3$ jäljet ovat $3, 0, -2p, -3q$ tässä järjestyksessä. Ja laske $Tr(\beta^4)$. Päättele, että $\Delta(1, \beta, \beta^2)^2 = -4p^3 - 27q^2$. Anna yleisen kolmannen asteen yhtälön $X^3 + pX + q$ ratkaisukaava.

2. Todista Lemma 2.17 luentomonisteesta. Eli diskriminantti $\Delta^2(v) = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ voidaan laskea van der Monden matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

determinantin neliönä.

3. Määrittele, mitä tarkoittaa, että ideaali haroittuu. Olkoon $d \neq 0, 1$ neliövapaa kokonaisluku, ja p alkuluku. Olkoon $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Merkitään $\Delta^2 := \Delta^2(K)$ kunnan K diskriminanttia, ja O_K kokonaislukujen rengasta. Osoita, että

   a) (p) haaroittuu O_K:ssa, jos ja vain jos $p \mid \Delta^2$.

   b) (p) hajoaa kahden alkuideaalin tuloksi O_K:ssa, jos ja vain jos p on pariton ja $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$, tai $p = 2$ ja $d \equiv 1 \mod 8$.

   c) (p) on alkuideaali O_K:ssa jos ja vain jos p on pariton ja $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, tai $p = 2$ ja $d \equiv 5 \mod 8$.

4. Osoita, että luennoilla esitetty nollasta eroavien ideaalien ekvivalenssirelaatio on todella ekvivalenssirelaatio.

5. Olkoon P alkuideaali lukukunnan K kokonaislukujen renkaassa O_K. Osoita, että jos $\alpha \in P$, $\alpha \neq 0$ on valittu siten, että $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$ on minumaalinen, silloin α on jaoton alkio. Päättele, että jos O_K:ssa on yksikäsitteinen tekijöihinjako, silloin jokainen alkuideaali on pääideaali ja näin ollen O_K on pääideaalialue.

6. Olkoot P, Q kaksi erisuurta alkuideaalia renkaassa O_K. Osoita, että $P + Q = O_K$ ja $P \cap Q = PQ$.

7. Oletetaan, että jokaiselle nollasta eroavalle ideaalille I renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{23}]$, on olemassa sellainen ideaali J, joka on samassa ideaaliluokassa ja jolle $N(J) < 10$. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{23}]$ on pääideaalialue.