Algebrallinen lukuteoria: III Neliökunnat

1. Osoita, että seuraavat luvut ovat algebrallisia $1/2$, $\sqrt{-5}$, $e^{2\pi i/3}$, etsi niiden minimipolynomit, ja osoita, että ne ovat redusoimattomia. Voit käyttää Gaussin lemmaa tai Eisensteinin kriteeriota, kunhan kirjoitat kriteerion paperille selvästi.

2. Anna alkioiden $1/2$, $\sqrt{-5}$, $\omega = e^{2\pi i/3}$ konjugaatit, normit ja jäljet. Laske diskriminantit kunnille $\mathbb{Q}(1/2)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ ja $\mathbb{Q}(\omega)$.

3. Mikä on alkion $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ minimipolynomi? Mitkä ovat sen muut juuret?

4. Etsi yksiköt renkaassa $\mathbb{Z}[i]$ ja renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

5. Tarkastellaan kuntaa $\mathbb{Q}(\varphi)$, jossa $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, eli kultaisen leikkauksen vakio. Mikä on kuntalaajennuksen aste? Etsi kunnan kokonaislukujen rengas.

6. Jaa $6 + 12i$ redusoimattomiin tekijöihin renkaassa $\mathbb{Z}[i]$, ja todista, että nämä tekijät todella ovat redusoimattomia.

7. Olkoon $S = \{m + n\sqrt{-6} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, ja olkoon $I \lhd S$, jonka generaattorit ovat 2 ja $\sqrt{-6}$. Osoita, että S/I sisältää täsmälleen kaksi alkiota, ja päättele, että I on S:n maksimaalinen ideaali.

8. Olkoon $a \in R =: \mathbb{Z}[i]$:n nollasta poikkeava alkio. Määritellään $A := \{ar : r \in R\}$. Osoita, että R/A on äärellinen. Jos a on alkuluku, osoita, että R/A on kokonaisalue. Kirjoita sopiva lause äärellisistä kokonaisalueista ja päättele, että A on R:n maksimaalinen ideaali.