II Eukleideen alueet, pääideaalialueet, faktorialueet

Palautetaan 28.1.2010 klo 12 mennessä.

1. Tarkastellaan rengasta $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Osoita, että funktio $d(a+b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$ toteuttaa Eukleideen funktion ominaisuudet. Osoita, että renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on äärettömän monta yksikkötä. [Vihje: $3 + 2\sqrt{2}$ on yksikkö.]

2. Osoita, että renkaan R yksiköt muodostavat multiplikatiivisen ryhmän, ja että $\mathbb{Z}$:n yksiköt ovat täsmälleen ± 1.

3. Todista, että rengas $\mathbb{Z}[x]$ ei ole pääideaalialue, ja päättele, että se ei ole myöskään Eukleideen alue. [Vihje: tarkastele sellaisia polynomeja, jotka ovat muotoa $\{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \text{ parillinen } \}$].

4. Osoita, että renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ alkiot 2,3,$1+\sqrt{-5}$ ja $1-\sqrt{-5}$ ovat redusoimattomia. [Vihje: Tarkastele funktiota $d(a+b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.]

5. Edelleen tosita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:ssa ei ole yksikäsitteistä tekijöihin jakoa, ja päättele, että se ei myöskään ole Eukleideen alue eikä pääideaalialue. Osoita, että 2 ei ole alkualkio renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. [Vihje: mieti alkiota 6.]

6. Etsi alkutekijät ideaaleille (3), (5) ja (7) renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Osoita, että ideaalin (7) alkutekijät eivät ole pääideaaleja.

7. Osoita, että $\mathbb{Z}[\omega]$, missä $\omega = e^{2\pi i/3}$ on Eukleideen alue.

8. Osoita, että, jos $f, g \neq 0$ ovat alkupolynomeja pääideaalialueessa $K[x]$, silloin on olemassa polynomit a ja b siten että
$$1 = af + bg.$$

9. Osoita, että yhtälöllä $X^2 - 10Y^2 = \pm 2$ ei ole kokonaislukuratkaisuja. Päättele, että jos α jakaa sekä 2 että $\sqrt{10}$ renkaassa $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, silloin α on yksikkö. Osoita myös, että ei ole mahdollista kirjoittaa $\alpha = 2\beta + \sqrt{10}\gamma$, jossa $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

10. Renkaat $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ ja $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ovat pääideaalialueita. Anna generaattorit niiden ideaaleille $(3, \sqrt{6})$, $(5, 4+\sqrt{6})$ ja $(2, 1+\sqrt{7})$. [Vihje: Laske normit ideaaleille (p, α) osoittamalla, että $(p) \subset (p, \alpha) \subset O_K$ ja löydä alkio $\beta \in O_K$, jolla on sopiva normi.]