I Renkaitten, kuntien, kokonaisalueitten kertausta

Palautetaan 21.1.2010 klo 12 mennessä.

1. Osoita, että rengashomomorfismin ydin on aina ideaali. Kirjoita ja todista ensimmäinen isomorfialause renkaille.

2. Olkoon I kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}$ ideaali. Todista, että I on muotoa $d\mathbb{Z} := \{dn : n \in \mathbb{Z}\}$, jollekin $n \in \mathbb{Z}$. Milloin $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$? Milloin $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$? Olkoon $m, n \in \mathbb{Z}$, ja $I := m\mathbb{Z}$, $J := n\mathbb{Z}$. Mitä ovat ideaalit $I + J$, $I \cap J$ ja $I \cdot J$? Piirrä kuva, jossa on kaikkien ideaalien $n\mathbb{Z}$ sisältymiset toisiinsa, kun n jakaa luvun 120.

3. Anna määritelmä maksimaaliselle ideaalille. Olkoon R kommutatiivinen rengas ja I sen ideaali. Osoita, että I on maksimaalinen ideaali, jos ja vain jos R/I on kunta. Määritä renkaan $\mathbb{Z}$ maksimaaliset ideaalit. Mitä ovat ne ideaalit J renkaassa $\mathbb{Q}[x]$, joille pätee $((x+1)(x^2-3)) \subseteq J$.

4. Olkoon R kommutatiivinen rengas. Tarkastellaan polynomien joukkoa $R[x] := \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_i \in R\}$, jolla on normaalit polynomien yhteen- ja kertolaskusäännöt. Osoita, että jos R on rengas, niin myös $R[x]$ on rengas. Jos R on kommutatiivinen, niin myös $R[x]$ on kommutatiivinen. Jos R sisältää ykkösalkion, niin sisältää $R[x]$:kin. Jos R on kokonaisalue, silloin myös $R[x]$ on kokonaisalue. Jos K on kunta, $K[x]$ on kokonaisalue. Anna esimerkki, joka todistaa, että $K[x]$ ei ole kunta!

Jakokunnan konstruktio

5. Olkoon R kokonaisalue. Tarkastellaan joukkoa
$$S = R \times (R \setminus \{0\}) = \{(r, s) : r, s \in R, s \neq 0\}.$$
Määritellään relaatio joukossa S, sanomalla
$$(r, s) \sim (t, u) \text{ jos } ru = ts.$$
Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio, ja osoita, että r/s on ekvivalenssiluokka.

6. Määrittele ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku. Määrittele nolla-alkio, ykkösalkio, additiivinen käänteisalkio ja multiplikatiivinen käänteisalkio ja tarkista, että nämä toteuttavat kunnan aksioomat.

7. Joukko $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ koostuu kaikista reaaliluvuista, jotka ovat muotoa $a + b\sqrt{2}$, missä $a, b \in \mathbb{Z}$. Todista, että $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on reaalilukujen $\mathbb{R}$ alirengas, ja näin ollen kokonaisalue.