Algebra I

9. Öv. uppg. för tisd. 13.4.2010

1. Låt S_1 och S_2 vara delringar av en ring R. Visa att $S_1 \cap S_2$ är en delring av R.

2. Vi definierar $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$, samt $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ på ett analogt sätt. Visa att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ inte är en delmängd av $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, samt att $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ inte är en delmängd av $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Visa vidare att $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{R}$.

3. Visa vidare att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}$, samt att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cup \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ inte är en delring av $\mathbb{R}$ och att

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cup \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \neq \mathbb{R}.$$

4. Gör upp multiplikationstabellen för ringen $\mathbb{Z}_5$. Visa direkt (utan att använda något allmänt resultat) att $\mathbb{Z}_5$ är en kropp.

5. Gör upp multiplikationstabellen för ringen $\mathbb{Z}_6$, och bestäm $\mathbb{Z}_6^*$. (Här är $R^* = \{ a \in R \mid a$ har en mult. invers $a^{-1} \in R$, där $a^{-1}a = 1 = aa^{-1} \}$, för R en godtycklig ring.)

6. Lös ekvationen $x^2 - x = 0$, i ett heltalsområde D, dvs. finn alla element $x \in D$ för vilka $x^2 - x = 0$.
Lös också ekv. $x^2 - 1 = 0$, i ett heltalsomr. D.
Finn alla lösningar till ekvationen $x^2 + 2 = 0$ i heltalsområdet $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.