Algebra I

8. Öv. uppg. för tisd. 30.3.2010.

1.) Låt G vara en grupp, och antag att $H < G$ och $K \lhd G$. Visa att

$$HK = \{ \overset{\in G}{hk} \mid h \in H \text{ och } k \in K \}$$

är en delgrupp av G.

2.) Låt G vara en grupp, och antag att $H \lhd G$ och $K \lhd G$. Visa att $HK \lhd G$.

3.) Låt G vara en grupp, och antag att $H \lhd G$ och $K \lhd G$. Visa att $H \cap K \lhd G$.

4.) Låt p vara ett primtal. En ändlig grupp G sägs vara en p-grupp om $|G| = p^r$, där $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

a) Låt G vara en p-grupp, och låt $H < G$, $H \neq \{e\}$. Visa att H är en p-grupp.

b) Låt G vara en p-grupp, och låt $K \lhd G$, $K \neq G$. Visa att G/K är en p-grupp.

5) Låt G vara en p-grupp och G' vara en q-grupp, där p och q är primtal, $p \neq q$. Visa att den enda homomorfism från G till G' som existerar är den triviala homomorfismen $f_0 : G \to G'$, för vilken $f_0(g) = e'$, för alla $g \in G$.

6.) Låt $\mathcal{X}$ vara en godtycklig mängd, och låt R vara en godtycklig ring. Då är $Map(\mathcal{X}, R) = (Map(\mathcal{X}, R), +, \cdot)$, där vi def.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, för varje $x \in \mathcal{X}$, och

$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$, för varje $x \in \mathcal{X}$,

för alla $f, g \in Map(\mathcal{X}, R)$, en ring. Vi anser detta vara känt.

(Här är $Map(\mathcal{X}, R) = \{ f : \mathcal{X} \to R \mid f$ en godt. avb $\})$

Visa att $Map(\mathcal{X}, R)$ är en kommutativ ring om och endast om R är en kommutativ ring.