Algebra I

7. Öv. uppg. för tisd. 23.3.2010.

1.) Låt H och G vara ändliga grupper, så att $|H| = p$ och $|G| = q$, där p och q är primtal och $p \neq q$. Antag att $f: H \longrightarrow G$ är en homomorfism. Visa att $f(h) = e_G$, för alla $h \in H$. (Här betecknas e_G enhetselementet i G.)

2.) Låt H, G och K vara grupper, och låt $h: H \to G$ och $f: G \to K$ vara homomorfismer. Visa att

$$\mathrm{Ker}(f \circ h) = h^{-1}(\mathrm{Ker}(f)) .$$

3.) Visa att en grupp G är kommutativ om och endast om $Z(G) = G$. (Här betecknas $Z(G)$ gruppen G:s centrum.)

4.) Låt G och H vara grupper, och låt $f: G \to H$ vara en homomorfism. Antag att $K \triangleleft H$. Visa att $f^{-1}(K) \triangleleft G$.

5.) Låt G och H vara grupper, och låt $f: G \to H$ vara en surjektiv homomorfism. Antag att $J \triangleleft G$. Visa att $f(J) \triangleleft H$.

6.) Låt G och H vara grupper, och låt $f: G \to H$ vara en surjektiv homomorfism. Antag att G är en kommutativ grupp. Visa att H är en kommutativ grupp.